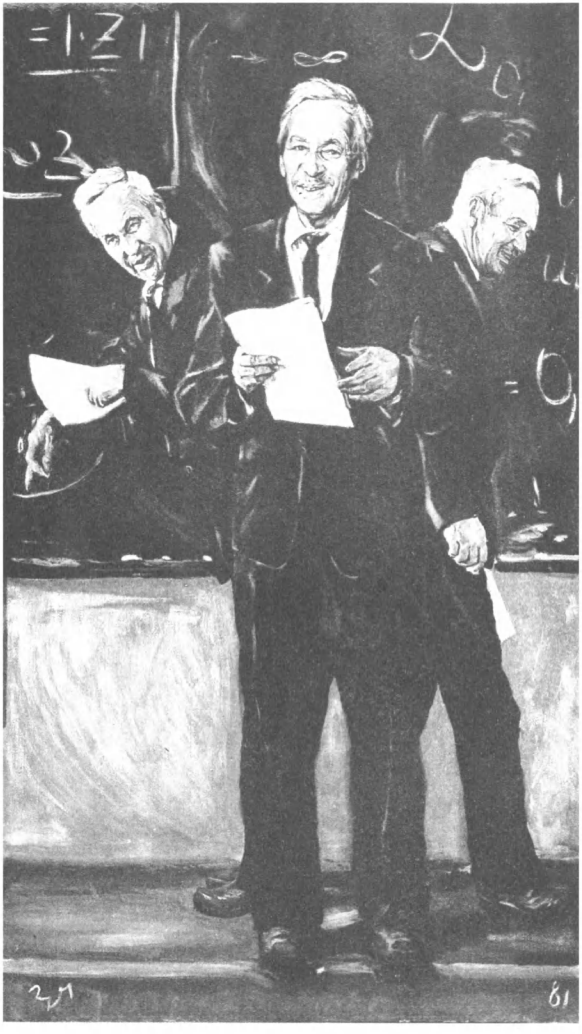
БИБЛИОТЕЧКА •КВАНТ•
выпуск 64

А. Н. КОЛМОГОРОВ

МАТЕМАТИКА — НАУКА И ПРОФЕССИЯ



БИБЛИОТЕЧКА •КВАНТ•
выпуск 64

А. Н. КОЛМОГОРОВ

МАТЕМАТИКА — НАУКА И ПРОФЕССИЯ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1988

Scan AAW

ББК 22.1
К60
УДК 51 (023)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Академик **Ю. А. Осипьян** (председатель), академик **А. Н. Колмогоров** (заместитель председателя), кандидат физ.-мат. наук **А. И. Буздин** (ученый секретарь), член-корреспондент АН СССР **А. А. Абрикосов**, академик **А. С. Боровик-Романов**, академик **Б. К. Вайнштейн**, заслуженный учитель РСФСР **Б. В. Воздвиженский**, академик **В. Л. Гинзбург**, академик **Ю. В. Гуляев**, академик **А. П. Ершов**, профессор **С. П. Капица**, академик **А. Б. Мигдал**, академик **С. П. Новиков**, академик АПН СССР **В. Г. Разумовский**, академик **Р. З. Сагдеев**, профессор **Я. А. Смородинский**, академик **С. Л. Соболев**, член-корреспондент АН СССР **Д. К. Фаддеев**

Колмогоров А. Н.

К60 Математика — наука и профессия/Сост. Г. А. Гальперин. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 288 с. — (Б-чка «Квант». Вып. 64.)
ISBN 5-02-013879-7

Сборник избранных статей о школьной математике и ее приложениях. Включен большой и разнообразный материал о профессии математика, о фундаментальных понятиях школьной математики, о теории вероятностей, алгоритме Евклида, о решении 10-й проблемы Гильберта, о связи математики с другими науками и техникой и т.д.; приведен ряд интересных задач. Имеется также специальный раздел для учителей, в котором содержатся лекции по научным основам школьного курса математики.

Для школьников, учителей, студентов.

К $\frac{1702010000-033}{053(02)-88}$ 179-88 ББК 22.1

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1988

АНДРЕЙ НИКОЛАЕВИЧ КОЛМОГОРОВ

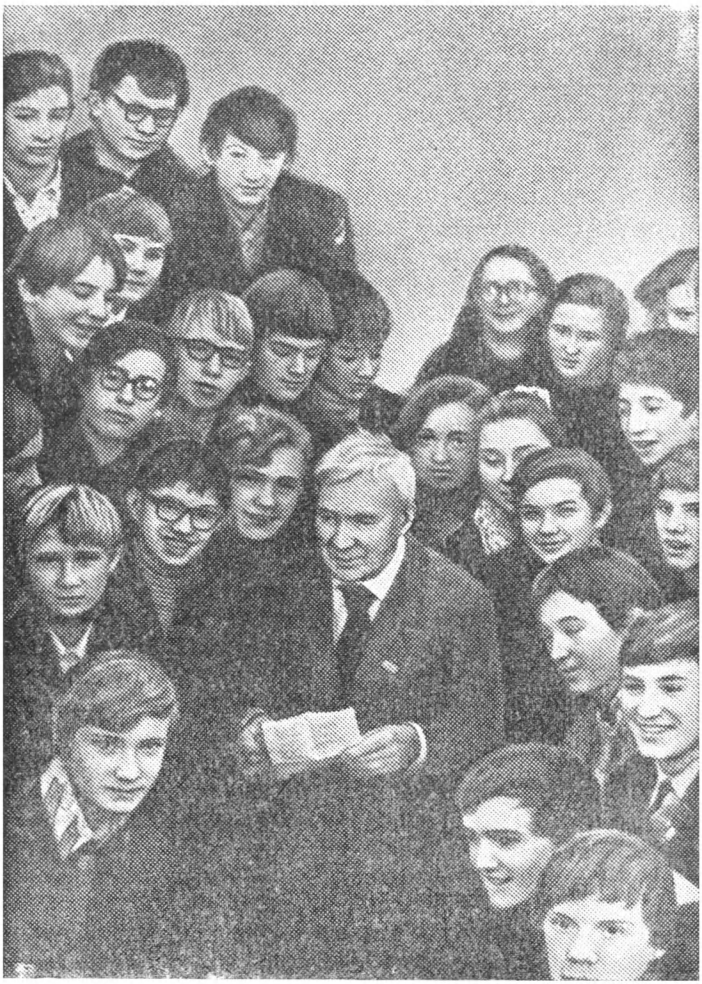
(1903—1987)

Эту книгу автору не суждено увидеть — 20 октября 1987 года закончился жизненный путь великого ученого, одного из крупнейших математиков XX века академика Андрея Николаевича Колмогорова.

А. Н. Колмогорову принадлежат фундаментальные открытия во многих областях математики и естествознания, роль его в развитии математики уникальна. Но помимо собственно математического творчества, потребовавшего от него колоссального духовного напряжения, в жизни Андрея Николаевича огромное место заняло служение Просвещению, воспитанию подрастающих поколений.

В возрасте 19 лет он становится учителем математики и несколько лет работает в школе. Начиная с 30-х годов — читает многочисленные лекции школьникам и студентам, активно участвует в становлении, а затем — проведении школьных математических олимпиад, сначала Московских, а затем Всероссийских и Всесоюзных. В 60-е годы он создает физико-математическую школу-интернат при МГУ, которую сразу стали называть «колмогоровской». С именем А. Н. Колмогорова связана глубокая реформа содержания школьной математики; он — автор многочисленных статей для учеников и учителей, автор и редактор школьных учебников. С 1970 года и до последних дней жизни А. Н. Колмогоров пестует организованный по его и академика И. К. Кикоина инициативе физико-математический журнал «Квант», а затем — серию «Библиотечка «Квант». А наряду с этим — почти шестидесятилетний труд профессора, заведующего кафедрами и лабораториями Московского университета, лекции, семинары, научные доклады, создание многих научных школ; около семидесяти аспирантов, ставших впоследствии кандидатами и докторами наук, членами Академии Наук СССР, академий наук союзных республик...

Вся жизнь Андрея Николаевича Колмогорова — беспримерный подвиг во имя Науки. Светлая память о великом Ученом, Учителе, Человеке навсегда останется в сердцах тех, кому выпало счастье соприкоснуться с этой необыкновенной Личностью.



А. Н. Колмогоров в физико-математической школе-интернате №18 при МГУ

ПРЕДИСЛОВИЕ СОСТАВИТЕЛЯ

Предлагаемая широкому кругу читателей книга представляет собой сборник избранных опубликованных статей выдающегося математика современности академика Андрея Николаевича Колмогорова, обращенных прежде всего к школьникам и учителям математики. Эти статьи, написанные в доступной форме, посвящены вопросам школьной математики и ее приложений.

В данном сборнике они сгруппированы в следующие четыре раздела: I. Размышления математика. II. Фундаментальные понятия школьной математики. III. Популярные лекции для школьников. IV. Лекции для учителей.

В разделе I приводятся воспоминания А. Н. Колмогорова о себе и о выдающихся математиках, с которыми он был долгое время тесно связан; его размышления о математике и профессии математика, о связи математики с практикой; приведено несколько предисловий к книгам для школьников. Раздел рассчитан «на всех» — школьников, студентов, преподавателей, любителей математики в широком смысле слова.

В раздел II вошли статьи, посвященные основным понятиям и методам школьной математики — функциям, графикам, преобразованиям, приближенным вычислениям, измерениям углов, векторам, логике построения формул и т. д. Этот раздел книги обращен в основном к школьникам старших классов.

Раздел III рассчитан на школьников, любящих и увлекающихся математикой, для которых математика может в дальнейшем стать их основной профессией. Сюда вошли широко известные статьи А. Н. Колмогорова о теории вероятностей, логарифмических сетках, алгоритме Евклида, решении 10-й проблемы Гильберта и другие. В этом же разделе приведено несколько интересных задач, предложенных Андреем Николаевичем в разное время школьникам (одна из задач до сих пор не решена!).

Раздел IV обращен к учителям математики. В него включены лекции А. Н. Колмогорова для учителей по научным основам школьного курса математики; статьи о журнале «Квант», о диалектико-материалистическом мировоззрении в школьном курсе математики и физики, о связи математики с другими науками и техникой и другие.

Из многочисленных статей А. Н. Колмогорова, посвященных школьной математике, в настоящую книгу попала лишь небольшая их часть. Сюда вошли наиболее интересные статьи, рассчитанные прежде всего на школьников и опубликованные в журналах «Квант», «Математика в школе», «Техника молодежи», в центральных газетах, в Большой Советской Энциклопедии (БСЭ) и других изданиях. Читателю, прочитавшему всю книгу, будут видны взаимные переплетения различных тем, столь характерные для всего творчества А. Н. Колмогорова. Однако многочисленные методические статьи А. Н. Колмогорова, опубликованные им в «Математике в школе» и представляющие специфический интерес только для учителей, в книгу не вошли.

Каждый из четырех разделов сборника делится на пункты. В большинстве случаев пункт состоит из отдельной опубликованной статьи А. Н. Колмогорова, иногда (пп. 3 и 7 раздела I и пп. 3 и 7 раздела III) в один пункт объединены несколько небольших однородных публикаций. За исключением специально оговоренных случаев, название каждого пункта сборника совпадает с названием соответствующей статьи А. Н. Колмогорова.

В конце книги приводится библиографический комментарий и список трудов А. Н. Колмогорова, посвященных школьной математике и ее приложениям (в список литературы включены все опубликованные научно-популярные работы Андрея Николаевича, в том числе работы по школьной тематике).

Г. А. Гальперин

РАЗДЕЛ I

РАЗМЫШЛЕНИЯ МАТЕМАТИКА

1. КАК Я СТАЛ МАТЕМАТИКОМ

Радость математического «открытия» я познал рано, подметив в возрасте пяти-шести лет закономерность

$$1 = 1^2$$
$$1 + 3 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 3^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2 \text{ и так далее.}$$

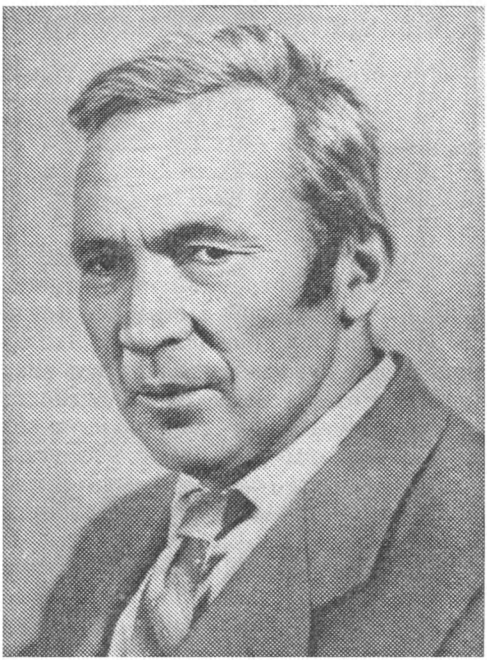
В нашем доме под Ярославлем мои тетушки устроили маленькую школу, в которой занимались с десятком детей разного возраста по новейшим рецептам педагогики того времени. В школе издавался журнал «Весенние ласточки». В нем мое открытие было опубликовано. Там же я публиковал придуманные мною арифметические задачи.

Семи лет меня определили в частную гимназию Е. А. Репман в Москве. Учиться в этой гимназии, организованной кружком радикально настроенной интеллигенции, было интересно. Гимназия с совместным обучением мальчиков и девочек (по программе мужских гимназий) все время находилась под угрозой закрытия. Отличные успехи на экзаменах «с представителем от округа» воспринимались всеми нами как дело долга и чести. Организация занятий была своеобразна. Одно время я мог заниматься математикой на класс старше, чем другими предметами.

Впрочем, на время интерес к другим наукам взял верх. Первое большое впечатление силы и значительности научного исследования на меня произвела книга К. А. Тимирязева «Жизнь растений». Потом вместе с одним из своих друзей (Н. А. Селиверстовым) я увлекся историей и социологией. Увлечение это было настолько серьезно, что первым научным докладом, который я сделал в семнадцатилетнем возрасте в Московском университете, был доклад в семинаре профессора С. В. Бахрушина о новгородском землевладении. В докладе этом,

впрочем, использовались (при анализе писцовых книг XV — XVI веков) некоторые приемы математической теории.

В 1918—1920 годах жизнь в Москве была нелегкой. В школах серьезно занимались только самые настойчивые. В это время мне вместе со старшими пришлось уехать на постройку железной дороги Казань — Екатеринбург



Андрей Николаевич Колмогоров

(теперь Свердловск). Одновременно с работой я продолжал заниматься самостоятельно, готовясь сдать экстерном за среднюю школу. По возвращении в Москву я испытал некоторое разочарование: удостоверение об окончании школы мне выдали, даже не потрудившись проэкзаменовать.

Техника тогда воспринималась как что-то более серьезное и необходимое, чем чистая наука. Одновременно с математическим отделением университета (куда принимали всех желающих без экзамена) я поступил на метал-

лургический факультет Менделеевского института (где требовался вступительный экзамен по математике). Но скоро интерес к математике перевесил сомнения в актуальности профессии математика. К тому же, сдав в первые же месяцы экзамены за первый курс, я, как студент второго курса, получил право на 16 килограммов хлеба и 1 килограмм масла в месяц, что, по представлениям того времени, обозначало уже полное материальное благополучие. Одежда у меня была, а туфли на деревянной подошве я изготовил себе сам.

Впрочем, в 1922 — 1925 годах потребность в дополнительном к весьма маловесомой в то время стипендии заработке привела меня в среднюю школу. Работу в Потылихинской опытно-показательной школе Наркомпроса РСФСР я вспоминаю теперь с большим удовольствием. Я преподавал математику и физику (тогда не боялись поручать преподавание двух предметов сразу девятнадцатилетним учителям) и принимал самое активное участие в жизни школы (был секретарем школьного совета и воспитателем в интернате).

В университет я приходил только на специальные курсы и семинары. На втором курсе выполнил первые самостоятельные научные работы. Теорией тригонометрических рядов у профессора В. В. Степанова я начал заниматься вместе со своим близким другом — необычайно ярким и талантливым математиком Г. А. Селиверстовым (оба брата Селиверстовы погибли во время Великой Отечественной войны). Моими первыми руководителями в университете были, кроме В. В. Степанова, В. К. Власов, П. С. Александров, П. С. Урысон. Несколько позднее я стал учеником Н. Н. Лузина.

Как это бывает обычно, мои первые работы были посвящены решению отдельных уже поставленных трудных задач. Более широкую деятельность по созданию нового направления исследования я начал с А. Я. Хинчиным в моей основной математической специальности — теории вероятностей.

В более поздние годы большое значение во всей моей дальнейшей работе имело сотрудничество со способными учениками, перенимавшими потом руководящую роль в том или ином направлении исследований. Это И. М. Гельфанд — в функциональном анализе, С. М. Никольский — в теории приближений функций многочленами, А. М. Обухов — в исследовании турбулентного движения и в последние годы В. И. Арнольд — в разработке методов теории

дифференциальных уравнений, связанных с «малыми знаменателями».

Вся моя деятельность с 1920 года неразрывно связана с Московским университетом.

Занимаясь с некоторым успехом, а иногда и с пользой, довольно широким кругом практических приложений математики, я остаюсь в основном чистым математиком. Восхищаясь математиками, которые превратились в крупных представителей нашей техники, вполне оценивая значение для будущего человечества вычислительных машин и кибернетики, я все же думаю, что чистая математика в ее традиционном аспекте еще не потеряла своего почетного места среди других наук. Гибельным для нее могло оказаться только чрезмерно резкое расслоение математиков на два течения: одни культивируют абстрактные новейшие разделы математики, не ориентируясь отчетливо в их связях с породившим их реальным миром, другие заняты «приложениями», не восходя до исчерпывающего анализа их теоретических основ. Поэтому мне хочется подчеркнуть законность и достоинство позиции математика, понимающего место и роль своей науки в развитии естественных наук, техники да и всей человеческой культуры, но спокойно продолжающего развивать «чистую математику» в соответствии с внутренней логикой ее развития.

Молодой человек, чувствующий себя предназначенным идти по этому пути, может не бояться оказаться в нашей стране менее нужным, делающим какую-то излишнюю, менее актуальную работу, чем агроном, инженер, физик или кибернетик.

2. НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ

Первые мои воспоминания о Павле Самуиловиче Урысоне относятся к зиме 1920-21 года, когда я только начинал свои занятия в университете. Болеслав Корнелиевич Млодзеевский и Николай Николаевич Лузин объявили параллельные курсы «Теории аналитических функций». Хотя курсы были элементарные, предназначенные для студентов второго или третьего года обучения, на лекциях Лузина собиралась почти вся «Лузитания» — группа учеников Николая Николаевича, в основном, говоря современным языком, аспирантского возраста. Некоторые из лузитанцев в качестве своего рода соглядатаев появлялись и на лекциях Болеслава Корнелие-

вича. Ученики Николая Николаевича были ревнители логической строгости и отмечали каждую оплошность Болеслава Корнелиевича в этом отношении. Впрочем, Болеслав Корнелиевич вполне сознательно давал их критике богатую пищу. Как-то на своих лекциях по дифференциальной геометрии он высказывал нам такое нравоучение: «Некоторые вам говорят, что не существует бесконечно малых, а вот смотрите — я рисую на доске бесконечно малый треугольник!». В теории аналитических функций Болеслав Корнелиевич без лишней, по его мнению, в элементарном курсе логической скрупулезности быстро двигался от элементарных определений и теорем к более глубоким конкретным аналитическим фактам.

Курс же Николая Николаевича надолго задержался на доказательстве при самых общих предположениях (что тогда еще было необычным в элементарных курсах) так называемой «теоремы Коши», лежащей в основе всей теории аналитических функций. По своему обычаю Николай Николаевич создавал доказательство на лекциях, обращаясь к помощи слушателей. Ему пришло в голову построить доказательство теоремы Коши на некотором вспомогательном чисто геометрическом утверждении, которое и было предложено нам доказать. Мне удалось показать, что в действительности это утверждение ошибочно. Николай Николаевич сразу понял идею примера, опровергающего это предположение. Было решено, что я доложу опровергающий пример на студенческом математическом кружке.

Павел Самуилович взялся предварительно проверить мои построения и доказательства, которые сначала были изложены не вполне строго. Говорилось просто, что некую кривую, «очевидно», можно слегка сдвинуть так, что без большого увеличения длины она обойдет такие-то точки, и т. п. Павел Самуилович очень деликатно, но настойчиво достиг того, что я сам подсчитал все относящиеся сюда «эпсилон и дельта».

Хотя мое достижение было довольно детским, оно сделало меня известным кругу лузитанцев, от которого я стоял, впрочем, несколько в стороне, колеблясь между культивировавшимися в их среде интересами, возникшим ранее увлечением проективной геометрией (которую старомодно, но подлинно талантливо читал Алексей Константинович Власов) и смутным желанием заниматься математикой, имеющей широкие выходы в физику и естествознание. В следующем, 1921-22 учебном году я

посещал лекции Н. Н. Лузина и П. С. Александрова уже в качестве «своего», получив, кажется, даже № 16 в нумерации лузитанцев. Мои попытки заниматься по следам лекций П. С. Александрова «дескриптивной теорией множеств» первое время приводили лишь к скромным результатам. Не помню даже, рассказывал ли я их кому-либо подробно. Тем не менее что-то заставило Павла Самуиловича обратить на меня свое внимание. Однажды после одной из лекций Лузина Павел Самуилович подошел ко мне на университетской лестнице и стал объяснять, что «в ближайшее время Николай Николаевич не собирается брать себе новых учеников», и поэтому не захочу ли я приходить к нему (Павлу Самуиловичу) и заниматься у него. Я охотно согласился.

Много раз приходил я к Павлу Самуиловичу в его комнату в Старопименовском переулке, где, кроме кровати и маленького рабочего столика, помещались лишь кресло и один стул.

Беседы касались самых разных областей математики: интересы и знания Павла Самуиловича были широки. В наибольшей мере Павел Самуилович пытался меня вовлечь в свои занятия проблемой Пуанкаре о замкнутых геодезических линиях на поверхности. Проблема привлекательна тем, что формулировка вполне элементарна. Если не придираться к формальной отточенности определений, ее можно объяснить «человеку с улицы», взяв скользкий, окатанный морскими волнами камень и резиновое колечко. Гипотеза Пуанкаре состоит в том, что по крайней мере тремя различными способами растянутое резиновое колечко можно надеть на наш камень так, что оно, стремясь сократить свою длину, не будет соскальзывать (т. е. так, что его длину нельзя уменьшить при маленьком сдвиге в стороны на небольшом участке). При этом рассматриваются только расположения резинового колечка без самопересечений (т. е., например, не имеющие вида восьмерки). На поверхности шара таких расположений колечка бесконечно много (по любому «большому кругу»), на трехосном эллипсоиде — ровно три (по трем главным сечениям). Гипотеза заключается в том, что случай эллипсоида минимальный, что три замкнутых геодезических без самопересечений найдутся на любой замкнутой выпуклой поверхности (или, еще более общим образом, на любой поверхности, «гомеоморфной» поверхности сферы). Самому Пуанкаре удалось доказать существование одной замкнутой геодезической. Павел

Самуилович доказал существование второй и упорно искал доказательство существования третьей.

Весь примыкающий сюда круг вопросов мне очень нравился, он соответствовал моим представлениям о той математике, которой наиболее следует заниматься. Но доказать существование третьей замкнутой геодезической прямыми наивными рассмотрениями без привлечения новых методов, видимо, было не так легко. (В 1923 году Павел Самуилович получил книгу Блашке, где сообщалось, что задача решена Герглоцем, и излагалась вкратце идея построения Герглоца. Потому ли, что он считал задачу решенной или ввиду занятости теорией размерности и общей теории топологических пространств, сам Павел Самуилович более этой задачей не занимался и ничего на эту тему не опубликовал. В 1927 году решение задачи, применимое и для невыпуклых поверхностей, было дано Биркгофом. Немного позднее в работах Л. А. Люстерника и Л. Г. Шнирельмана было показано, что решение задачи о трех геодезических может быть получено в качестве частного следствия построенной ими общей глубокой теории, имеющей много других применений.)

Зато мои занятия более абстрактной теорией множеств, возбужденные слушанием лекций П. С. Александрова, привели меня к замыслу весьма общей «теории операций над множествами». Свои соображения по этому поводу, а затем и результаты я рассказывал Павлу Самуиловичу. Убедившись, что это направление исследований занимает меня более всего, Павел Самуилович отправил меня к П. С. Александрову, считая, что тот может с бо́льшим успехом руководить моей работой по дескриптивной теории множеств.

В этом же году я начал заниматься в семинаре по тригонометрическим рядам, где верховным руководителем был Н. Н. Лузин, а я занимался в группе, руководимой Вячеславом Васильевичем Степановым. Результаты, полученные мною в теории тригонометрических рядов, обратили на себя внимание Николая Николаевича, и с некоторой торжественностью Николай Николаевич предложил мне приходить в определенный день и час недели, предназначенный для группы учеников моего поколения, к нему. По представлениям, господствовавшим в «Лузитании», моим званием делалось теперь звание ученика Николая Николаевича, что не мешало, конечно, научному контакту со старшими товарищами по «Лузитании».

Внутренняя логика моих собственных занятий привела меня к топологии лишь много позднее, после увлечений математической логикой и теорией вероятностей. Сейчас мне несколько грустно думать, что в столь короткий период концентрированной научной активности Павла Самуиловича я соприкоснулся с его неповторимой творческой индивидуальностью лишь по периферии его интересов.

Московская математика того времени была богата яркими и талантливыми индивидуальностями. Но Павел Самуилович и на этом фоне выделялся универсальностью интересов в соединении с целеустремленностью в выборе предмета собственных занятий, отчетливостью постановки задач (в частности, передо мной, когда он считал себя ответственным за направление моей работы), ясной оценкой своих и чужих достижений в соединении с доброжелательством в применении к достижениям самым маленьким.

3. ДВА ИНТЕРВЬЮ

Беседа с Андреем Николаевичем Колмогоровым

Мы находимся в старом деревянном доме в деревне Комаровка под Москвой, где Андрей Николаевич обычно проводит конец недели. Светлая, скромно обставленная комната. В одном из углов старый, но качественный проигрыватель и специальные полки для пластинок. Стены заставлены стеллажами с книгами. В середине комнаты большой стол с множеством книг, оттисков статей, рукописей, художественных альбомов. Андрей Николаевич сидит у окна за небольшим письменным столом. Рядом с пишущей машинкой и аккуратно сложенными исписанными листами бумаги стоит магнитофон, на который записывается наша беседа. Стенограмму этой беседы мы и предлагаем вашему вниманию.

— *Андрей Николаевич, часто приходится слышать о возрастающей специализации науки. В то же время известно, что Вы занимались такими далекими друг от друга областями математики, как теория вероятностей и алгебраическая топология, математическая логика и теория динамических систем. В чем, по-Вашему, будущее науки — в универсальности или специализации?*

— Математика велика. Один человек не в состоянии изучить все ее разветвления. В этом смысле специализация неизбежна. Но в то же время математика — единая наука. Все новые и новые связи возникают между ее разделами, иногда самым непредвиденным образом. Одни

разделы служат инструментами для других разделов. Поэтому замыкание математиков в слишком узких пределах, должно быть, гибельно для нашей науки. Положение облегчается тем, что работа в области математики в принципе коллективна. Должно быть некоторое количество математиков, которые понимают взаимные связи между самыми различными областями математики. С другой стороны, можно работать с большим успехом и в какой-нибудь совсем узкой ветви математики. Но в этом случае надо еще, хотя бы в общих чертах, понимать связи между своей специальной областью исследования с областями смежными, понимать, что по существу научная работа в математике — коллективная работа.

— *Что Вы можете сказать о соотношении и связях прикладной и чистой математики*?

— Прежде всего, нужно заметить, что само различие между прикладной и чистой математикой чрезвычайно условно. Вопросы, которые, казалось бы, принадлежат к чистой математике и не имеют применений, очень часто совершенно неожиданно оказываются важными для разных приложений. С другой стороны, занимаясь прикладной математикой ученый почти неизбежно наталкивается на смежные вопросы, решающиеся теми же методами, привлекающие его своей логической красотой, но, собственно говоря, непосредственных приложений уже не получающие. Вероятно, в практической работе математика нужно проявлять должную широту. Несомненно, что математики должны, это их долг, заниматься всеми теми вопросами, которые настоятельно навязываются вопросами практики. Если смежные вопросы, пусть сразу применений не имеющие, являются привлекательными хотя бы в силу красоты и естественности возникающих задач, ими, конечно, тоже нужно заниматься.

— *Норберт Винер пишет в своей автобиографической книге, что перестал заниматься функциональным анализом, когда почувствовал, что «Колмогоров наступает мне на пятки». А как Вы относитесь к конкуренции в математике*?

— Заявление Винера мне не совсем понятно. В функциональном анализе я сделал немного. Самая интересная моя работа по функциональному анализу называется «Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве».

Что касается конкуренции, то конкуренция может быть дружеской, тогда она мало отличается от сотрудни-

чества. Тесное содружество, когда два математика одновременно и параллельно думают над одной и той же проблемой, порой бывает очень продуктивным. Но при этом иногда бывает и так, что участие одного из сотрудников практически оказывается излишним, и тогда ему разумно без обиды отойти в сторону.

— *Всегда ли математика была Вашим основным увлечением? Когда Вы окончательно выбрали математику как профессию?*

— Нет, как это часто бывает, пути моего развития были более извилистыми. С раннего детства было известно, что я умею хорошо считать и что меня интересуют математические задачи арифметического характера; сравнительно рано познакомился и с началами алгебры. Но все это относится к очень раннему возрасту. Несколько позднее, в средних классах школы, победили уже совсем другие увлечения — в частности, историей. Возврат к математике произошел в самых последних классах средней школы. Когда я кончил среднюю школу, то долго колебался в выборе дальнейшего пути. В первые студенческие годы, кроме математики, я занимался серьезным образом в семинаре по древнерусской истории профессора С. В. Бахрушина. Не бросал мысль о технической карьере, почему-то меня увлекала металлургия, и, параллельно с университетом, я поступил на металлургическое отделение Химико-технологического института им. Д. И. Менделеева и некоторое время там проучился. Окончательный выбор математики как профессии, собственно говоря, произошел, когда я начал получать первые самостоятельные научные результаты, то есть лет с восемнадцати — девятнадцати.

— *Когда обычно проявляются способности к математике? Всегда ли, как у Вас, в раннем возрасте?*

— Я довольно много преподавал в средней школе. У меня сложилось такое впечатление, что интерес к математике в средних классах, в возрасте двенадцати — тринадцати лет, часто оказывается временным и совсем проходит к старшим классам. Особенно часто это бывает у девочек. С теми школьниками, которые увлечены математикой в возрасте 13 — 14 — 15 лет, по-моему, стоит работать. При умелом культивировании их способности постепенно развиваются и, как правило, уже не теряются. Бывает, конечно, и очень много исключений. Разумеется, серьезный интерес к математике может проявиться и позже.

— *Какие математики старшего поколения оказали на Вас наибольшее влияние?*

— В студенческие годы я был учеником Николая Николаевича Лузина. Кроме него, большое влияние оказали на меня Вячеслав Васильевич Степанов, Александр

Андрей Николаевич Колмогоров и Павел Сергеевич Александров в Комаровке

Яковлевич Хинчин, Павел Сергеевич Александров и другие математики их поколения.

— *Что Вам хотелось бы сказать о своих учениках и кого из них Вы хотели бы упомянуть?*

— Мне повезло на талантливых учеников. Многие из них, начав работу вместе со мной в какой-нибудь области, потом переходили на новую тематику и уже совершенно независимо от меня получали замечательные результаты. Выделить из них наиболее заслуживающих упоминания было бы трудно.

Скажу только в виде шутки, что в настоящее время один из моих учеников управляет земной атмосферой, а другой — океанами *).

— *Андрей Николаевич, каков Ваш режим дня?*

— Естественно, в течение моей достаточно длинной жизни режим дня в разные ее периоды был различным.

---

*) Речь идет об академике А. М. Обухове, директоре Института физики атмосферы АН СССР, и о члене-корреспонденте АН СССР А. С. Монине, специалисте в области океанологии.— *Примеч. ред.*

Опишу, пожалуй, только тот режим дня, который мы с Павлом Сергеевичем Александровым установили для себя на те 3 — 4 дня в неделю, которые мы проводили за городом, под Москвой, в деревне Комаровка.

День начинался в 7 часов утра. Первый час был посвящен гимнастике, пробежке. В 8 часов мы завтракали и принимались за работу за столом — с пишущей машинкой или без нее. В час или два часа дня был полдник, состоящий из молока или кефира с хлебом. После полдника мы еще немного работали, но обычно отправлялись на большую прогулку пешком или — зимой — на лыжах, до 4 часов дня. Потом на полчаса мы укладывались спать. В 5 часов был обед. После обеда мы иногда еще занимались работой, обычно — второстепенной: переписывание или тому подобное. Вечер посвящался чтению, музыке, приему гостей. Перед сном мы любили еще сделать небольшую прогулку. Укладывались спать около 10 часов.

Но, конечно, когда работаешь и начинает получаться решение какой-либо важной проблемы, все отступает на задний план, никакого распорядка дня уже не бывает.

— *Вы, как и многие математики, любите серьезную музыку. Расскажите, почему.*

— Ваше замечание о многих математиках, увлекающихся серьезной музыкой, мне кажется правильным. Если прийти в концертный зал, особенно в Малый зал Московской консерватории, то вы там увидите непропорционально много математиков. По-видимому, между математическим творчеством и настоящим интересом к музыке имеются какие-то глубокие связи. Но выяснить и объяснить эти связи мне представляется довольно трудным. Замечу, впрочем, что мой друг Павел Сергеевич Александров рассказывал, что у него каждое направление математической мысли, тема для творческих размышлений, связывались с тем или иным конкретным музыкальным произведением.

Среди любимых композиторов назову в первую очередь Моцарта, Шумана, ну и, конечно, величайших музыкантов — Баха, Бетховена.

— *Лингвисты и литературоведы обратили внимание на Ваши публикации по стиховедению. Что Вы можете сказать об этом — менее обычном — сочетании: математика и поэзия?*

— Мне хотелось бы разделить этот вопрос на два, так как мое увлечение поэзией имеет такой же непроизвольный, стихийный характер, как и у людей, не занимаю-

щихся теоретическим исследованием стиха. Любимые мои поэты — это Тютчев, Пушкин, Блок. Что же касается моих научных работ по метрике и ритмике русского стиха, то они действительно обратили на себя внимание специалистов-литературоведов, но все-таки это довольно специальная область исследования, интересоваться которой совершенно не обязательно всякому.

— *Занимаетесь ли Вы спортом? Каким?*

— Состязательным спортом я никогда не занимался. Если не ошибаюсь, я только три раза в жизни участвовал в гонке на 10 км на лыжах.

Но я всегда очень любил большие прогулки пешком и на лыжах, совершал длинные путешествия на байдарке или на лодке. Очень люблю плавание, походы в горах. Во всех этих занятиях я ценю не только их пользу для здоровья, но ту радость общения с природой, которую они приносят.

Всегда любил купание в морском прибое. В солнечные мартовские дни люблю делать большие лыжные пробеги в одних шортах. Во время таких мартовских лыжных пробегов люблю выкупаться посреди сияющих на солнце сугробов в только что вскрывшейся ото льда речке. Впрочем, я не советую обязательно подражать мне во всем этом — можно просто записаться в какую-нибудь привлекающую Вас спортивную секцию.

— *Андрей Николаевич, что бы Вы хотели пожелать нашим читателям?*

— Я сам являюсь ученым, и, конечно, в первую очередь я желаю нашим читателям внести тот или иной вклад в науку, большой или хотя бы маленький. Замечу, впрочем, что в случае, если все наши читатели принялись бы писать самостоятельные научные работы, то научные журналы не выдержали бы такого натиска. Поэтому я выскажу и более скромное пожелание — чтобы школьное увлечение математикой пригодилось вам и в дальнейшей жизни. В «Кванте» мы как раз стараемся вам показать, как разнообразны приложения математической науки.

Ученик об учителе

Интервью с академиком А. Н. Колмогоровым 8 июня 1983 г. в связи со столетием со дня рождения академика Н. Н. Лузина.

— *Что Вы знали о Н. Н. Лузине до того, как впервые увидели его?*

— Когда осенью 1920 г. я поступил на первый курс математического отделения физико-математического факультета Московского университета, имя Н. Н. Лузина и как ученого, и как лектора было очень популярно среди студентов. Я сразу же стал слушать его лекции по теории функций комплексного переменного; параллельно Б. К. Млодзеевский читал курс ТФКП в более традиционном жанре. Мы, студенты, живо обсуждали различия в стиле изложения этих двух курсов. Помню, что одновременно Н. Н. Лузин читал курс линейной алгебры, но я его не слушал.

— *Был ли курс ТФКП обязательным? Должны ли Вы были его слушать?*

— Студенты тогда почти ничего не были должны в современном понимании слова «должны». Посещение было вольное. Нужно было лишь сдавать экзамены. Список экзаменов, которые требовалось сдать, чтобы перейти на второй курс, был очень небольшим. Я сдал все эти экзамены в начале первого курса, чтобы получить студенческий паек (пуд печеного хлеба и килограмм масла в месяц; этот паек прибавлялся к обычной карточке) и потом уже до начала пятого курса почти ничего не сдавал (но за студенческое время написал пятнадцать научных работ и с чрезвычайным увлечением преподавал в школе, так что на экзамены оставалось мало времени). Вообще, с современной точки зрения был довольно большой хаос. Что же касается лекций по ТФКП, то они предназначались для второго курса.

— *Когда и каким образом состоялось Ваше личное знакомство с Н. Н. Лузиным?*

— Знакомство состоялось, когда я был студентом второго курса. На этом курсе я начал заниматься в семинаре В. В. Степанова. Работая в этом семинаре, я решил задачу, которой интересовался Н. Н. Лузин. Возможно, что и сама эта задача была им поставлена. Во всяком случае, именно со ссылкой на Н. Н. Лузина формулировка задачи обсуждалась на семинаре В. В. Степанова. Речь шла о построении ряда Фурье со сколь угодно медленно стремящимися к нулю коэффициентами. Мне удалось решить эту задачу (это была моя первая самостоятельная работа). Когда об этом рассказали Н. Н. Лузину, он обратился ко мне (помню, это было на университетской лестнице) и предложил регулярно приходить к нему на занятия.

— *В чем состояли эти занятия с Н. Н. Лузиным?*

— Каждый ученик приходил к Николаю Николаевичу Лузину в его арбатскую квартиру раз в неделю вечером — в постоянно выделенный для него день недели. Мой день был общий с Петром Сергеевичем Новиковым, Людмилой Всеволодовной Келдыш, Игорем Николаевичем Хлодовским. Занятие состояло в беседе Н. Н. Лузина с нами четырьмя на научные темы. Интенсивная работа с учениками была одним из тех новшеств, которые культивировал Николай Николаевич.

— *Какое влияние оказали на Вас эти занятия?*

— Все мои первые работы были посвящены темам, развивавшимся Николаем Николаевичем: тригонометрическим рядам, теории интегрирования, дескриптивной теории множеств и функций. Возможность общаться с Н. Н. Лузиным, рассказывать ему еще не полностью завершенные результаты была очень важна. Надо, правда, признаться, что дескриптивной теорией множеств и функций я занимался вопреки желанию Николая Николаевича. Николай Николаевич всех своих учеников делил на тех, кто должен заниматься метрикой (т. е. тригонометрическими рядами, теорией интегрирования) и дескрипцией. Мне назначена была метрика.

— *Каково было влияние Н. Н. Лузина на Ваши последующие работы?*

— В 1925 г. я окончил Московский университет как студент и поступил в университетскую аспирантуру. Моим руководителем в аспирантуре был по-прежнему Н. Н. Лузин. (Напомню, что пребывание в аспирантуре не завершалось тогда диссертацией, как сейчас: ведь ученые степени были введены лишь в 1934 г.) Еще в 1924 г. я начал интересоваться теорией вероятностей. Моя первая работа в этой области относится к тому же 1924 г. Она была выполнена совместно с А. Я. Хинчиным (также учеником Н. Н. Лузина). Все мои занятия по теории вероятностей совместно с А. Я. Хинчиным, весь вообще первый период занятий этой теорией отмечен тем, что мы применяли методы, разработанные в метрической теории функций. Такие темы, как условия для применимости закона больших чисел, условие сходимости ряда независимых случайных величин, велись, по существу, методами, выкованными в общей теории тригонометрических рядов, т. е. методами, разрабатывающимися Н. Н. Лузиным и его учениками.

— *Как Вы оцениваете роль Н. Н. Лузина в развитии математических знаний?*

— Н. Н. Лузин вошел в математику как автор первоклассных работ в метрической и дескриптивной теории функций, дескриптивной теории множеств. Для Москвы, для московской математической школы важное значение имел новый подход к работе с молодежью. Существенным в этом подходе было вполне индивидуальное личное руководство, а также умение придавать избранной тематике особенную значимость. Н. Н. Лузин настойчиво внедрял следующий метод работы (он и сам работал таким образом, и приучал к этому своих учеников): берясь за какую-либо проблему, надлежит смотреть на нее с различных точек зрения. Надо пытаться доказывать гипотезу и одновременно опровергать ее. Если доказательство не выходит, надо переходить к опровержению гипотезы, к построению противоречащего примера. Если не получается построение, надо снова вернуться к доказательству. И пока не получится результат, нельзя покидать данную область. В теории функций действительного переменного такая установка двойного видения (поиск доказательства — поиск опровержения), такой подход к делу естественно привел к культивированию чрезвычайно высокой техники построения примеров (или, как теперь принято говорить, контрпримеров). В этом направлении школа Н. Н. Лузина двадцатых годов была им поставлена на уровень, превосходящий все другие научные центры мира. Число тонких примеров, построенных в школе Н. Н. Лузина, очень велико. Из того, что сейчас приходит мне на память, назову нуль-ряд Д. Е. Меньшова и построенное М. А. Лаврентьевым обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с непрерывной правой частью, для которого единственность нарушается в каждой точке.

4. О ПРОФЕССИИ МАТЕМАТИКА

4.1. За многочисленное и талантливое пополнение кадров советских математиков

Значение математических методов в таких науках, как механика, физика или астрономия, хорошо известно. Также всем известно и то, что математика необходима в практической работе инженеров и техников. Элементарные знания по геометрии или умение пользоваться буквенными формулами необходимы почти каж-

дому мастеру или квалифицированному рабочему. Но менее ясным для многих является вопрос о том, что значит иметь специальность математика и заниматься самой математикой в качестве основной профессии.

Очень многие представляют себе дело так, что в учебниках и математических справочниках собрано уже вполне достаточно формул и правил для решения всевозможных, встречающихся на практике математических задач. Даже очень образованные люди часто спрашивают с недоумением: разве в математике можно сделать что-либо новое?

Поэтому и математика иногда представляют себе как скучного человека, выучившего большое число формул и теорем, и считают, что его задача состоит в том, чтобы заученные готовые знания передать другим.

Во всем этом верно только то, что математические сведения, сообщаемые в средней школе и на первых ступенях изучения математики в высшей школе, добыты человечеством давно. Но даже и эти простейшие математические сведения могут применяться умело и с пользой только в том случае, если они усвоены творчески, так, что учащийся видит сам, как можно было бы прийти к ним самостоятельно. От преподавателя математики и в высшей и средней школе требуется не только твердое знание преподаваемой им науки. Хорошо преподавать математику может только человек, который сам ею увлечен и воспринимает ее как живую, развивающуюся науку. Вероятно, многие учащиеся средней школы знают, насколько увлекательной, а благодаря этому легкой и доступной становится математика у таких преподавателей.

Еще в большей степени самостоятельность и способность по-новому подойти к математической формулировке задачи необходимы тому, кто применяет математику в решении технических проблем. Это относится к работе каждого инженера. Но так как требующиеся при этом математические знания и способности имеются не у всех, то большинство наших научно-исследовательских институтов и даже некоторые крупные заводы стали усиленно привлекать специалистов-математиков для работы вместе с инженерами над техническими проблемами.

Математики, способные руководить большими вычислительными работами, особенно дефицитны. В настоящее время имеется много задач, в которых для получения числового результата требуются вычисления, превосхо-

дящие возможности одного человека. Расчет упругих напряжений в плотинах, фильтрации воды под плотинами, сопротивлений, испытываемых самолетами при полете, или траектории снарядов — вот типичные примеры таких задач.

Уже давно при научных институтах, проектных организациях и заводах, нуждающихся в решении подобных задач, стали возникать вычислительные бюро *) со многими десятками вычислителей, оборудованные арифмометрами и вычислительными автоматами, требующими для выполнения арифметических действий над многозначными числами лишь набора их при помощи клавиш и нажатия соответствующей кнопки (+, —, ×, :). Однако современные наука и техника сталкиваются с такими задачами, которые при этом уровне организации вычислительных работ требуют многих месяцев, а иногда и лет работы десятков вычислителей. Такое положение вызвало бурное развитие современной «машинной математики», о которой рассказывается ниже.

Конструирование и обслуживание современных вычислительных машин превратились в большие инженерные специальности, для которых специалисты готовятся на соответствующих отделениях технических вузов. Для работы же вычислителя в вычислительном бюро старого типа или для введения задачи в современную электронную вычислительную машину достаточно среднего общего образования и полугодичного производственного обучения. Для того чтобы довести решение математических задач до передачи для получения численных результатов вычислительному бюро или вычислительной машине, необходимо большое количество людей с глубокими математическими знаниями.

Теория «вычислительных методов» математики развилась сейчас в большую науку и потребность в специалистах, владеющих этими методами, с развитием «машинной математики» возрастает. Перед нами возникают своеобразные задачи «программирования», т. е. приведения процесса вычислений к виду, допускающему полную автоматизацию решения на машинах задач определенного типа.

Ошибочным является представление о математике как о науке законченной, раз навсегда построенной в своих

---

*) Речь идет о конце 50-х — начале 60-х годов.— *Примеч. сост.*

теоретических основах. В действительности математика обогащается совершенно новыми теориями и перестраивается в ответ на новые запросы механики (нелинейные колебания, механика сверхзвуковых скоростей), физики (математические методы квантовой физики) и других смежных наук. Кроме того, и в недрах самой математики после накопления большого числа разрозненных специальных задач, решенных частными приемами, создаются новые общие теории, освещающие эти задачи с иных точек зрения и позволяющие решать их однообразными методами. Например, методы возникающего на наших глазах «функционального анализа» относятся к математическому анализу (который был создан еще в XVII—XVIII вв. и преподается во всех высших технических заведениях) примерно так, как относится алгебра к арифметике. Так называемые «операторные методы» функционального анализа уже нашли широкое применение в современной физике и технике.

Советскому Союзу требуется сейчас большое количество самостоятельных исследователей по теоретическим вопросам математики. При сравнении изданных обзоров успехов советской математики за 1917—1947 гг. обнаруживается, что в первом пятнадцатилетии было около двухсот математиков, внесших в математическую науку что-либо существенно новое, во втором же пятнадцатилетии — уже 600—800.

Количество математиков с университетской подготовкой, требующихся для работы над задачами, выдвигаемыми естествознанием и техникой, значительно больше, особенно если учесть, что, кроме теоретической разработки вопроса, здесь, как правило, необходимо проведение больших расчетных работ. Постоянно возрастает ежегодная потребность научных и научно-технических институтов и вычислительных центров в молодых сотрудниках-математиках, выпущенных университетами.

Если учесть еще потребность нашей страны в преподавателях математики в педагогических и учительских институтах, то станет понятным, почему Советскому государству требуется так много математиков самой высокой квалификации, подготовляемых на механико-математических и физико-математических факультетах университетов.

За последние годы в нашей стране проведены важные мероприятия, направленные на повышение квалификации преподавателей математики высших учебных заведений,

на привлечение в университеты большого числа молодежи, имеющей склонность к математике.

Интересно в связи с этим вспомнить, что в первые годы после Великой Октябрьской социалистической революции молодежь стремилась почти исключительно в высшие технические заведения. Многим молодым людям представлялось тогда, что только таким путем они примут непосредственное участие в социалистическом строительстве. В первые революционные годы такие настроения имели некоторое разумное основание. Но потом, когда развитие науки стало насущнейшей с хозяйственной точки зрения потребностью нашей страны, необходимы были усилия, чтобы преодолеть недоверие части молодежи к перспективам, ожидающим ее при поступлении в университеты. Эти настроения теперь изжиты. Но в применении к математике, которая издали, даже среди других наук, представляется слишком сухой и отвлеченной, с ними приходится бороться еще и сейчас.

С 1952 г. прием на математические специальности университетов СССР значительно увеличен по сравнению с предыдущими годами. Очень важно, чтобы при этом расширенном приеме на математические специальности попала не только хорошо подготовленная, но и любящая математику молодежь. Для этого необходимо, чтобы всюду на местах была создана возможность этим любителям математики определить свои склонности и оценить свои силы и возможности.

Чтобы сделать выбор вполне сознательно, полезно принять участие в работе математического кружка и в местной математической олимпиаде. Быть может, еще более полезно почитать соответствующую литературу и попробовать свои силы в решении более трудных задач.

4.2. Несколько замечаний о характере работы математика-исследователя

Как и всякая наука, математика требует прежде всего твердого знания того, что по исследуемому вопросу уже сделано. Но не следует думать, что в математике труднее, чем в других науках, добраться до возможности делать что-либо новое. Опыт говорит скорее о другом: способные математики, как правило, начинают самостоятельные научные исследования очень рано. Если математические открытия, сделанные в 16- или 17-летнем возрасте, являются все же исключениями, собираемыми

с особенной тщательностью в популярных книжках по истории математики, то начало серьезной научной работы в 19—20 лет на средних курсах университетов достаточно типично для биографий многих наших ученых. (Академик С. Л. Соболев в 1933 г. в возрасте 25 лет был уже избран в члены-корреспонденты АН СССР. В 1953 г. членом-корреспондентом АН СССР избран 25-летний математик комсомолец С. Н. Мергелян.)

Конечно, широта постановки задач приходит обычно несколько позднее, но при решении отчетливо поставленных трудных конкретных задач совсем молодые люди часто с успехом соревнуются со сложившимися известными учеными. Ежегодно около десятка научных работ, выполненных студентами математических специальностей Московского университета, публикуется в таком издании, как Доклады Академии наук СССР.

В основе большинства математических открытий лежит какая-либо простая идея: наглядное геометрическое построение, новое элементарное неравенство и т. п. Нужно только применить надлежащим образом эту простую идею к решению задачи, которая с первого взгляда кажется недоступной. Много примеров этого можно найти и в популярной литературе. Поэтому вовсе не существует непроходимой стены между самыми новыми и трудными оригинальными математическими исследованиями и решением задач, доступных способному и достаточно упорному начинающему математику. Интересно с этой точки зрения прочесть некоторые главы из «Математической автобиографии» знаменитого советского алгебраиста Н. Г. Чеботарева (опубликована в журнале «Успехи математических наук» (1948, т. III, вып. 3)), где автор излагает историю своих научных поисков, начиная с первых опытов гимназиста до крупнейших открытий в алгебре.

Другое замечание относится к работе математиков над вопросами естествознания (механики, физики и техники). Сейчас, когда сотрудничество между математиками и представителями смежных специальностей развивается особенно широко, можно определенно сказать, что наиболее успешным оно оказывается при условии, если математик не ограничивается ролью исполнителя сделанного ему «заказа», а старается проникнуть в существо естественнонаучных и технических проблем. По существу здесь речь идет о том, что специалисты по математической и теоретической физике, теоретической механике или теоретической геофизике могут подготавливаться двумя

путями: начинать свое образование с изучения физики, механики или геофизики, или же сначала изучать математику на математических отделениях университетов и потом основательно входить в ту или иную область применения математики.

Существует даже такая точка зрения, что второй путь дает лучшие результаты, т. е. что изучить на солидной математической основе аэромеханику, газовую динамику, сейсмологию или динамическую метеорологию легче, чем специалисту в какой-либо из этих областей восполнить недостаток математической подготовки. Такое мнение можно считать слишком крайним, и следует заметить, например, что хорошее владение экспериментальной техникой встречается у математиков, перешедших на работу в какой-либо смежной области, лишь как редкое исключение. Но нельзя не признать, что из математиков по образованию произошел ряд крупнейших наших специалистов в смежных науках.

Трудно отделить математику от механики и сейсмологии в работах академиков М. А. Лаврентьева и С. Л. Соболева. В первую очередь как механики известны академики М. В. Келдыш, Л. И. Седов и член-корреспондент АН СССР Л. Н. Сретенский; как геофизики — члены-корреспонденты АН СССР А. Н. Тихонов и А. М. Обухов; как специалист по теоретической физике — академик Н. Н. Боголюбов. Между тем все они окончили университеты в качестве математиков.

Можно было бы указать много связанных с именами математиков конкретных достижений в естествознании и технике, которые оказались весьма существенными с непосредственно практической стороны.

4.3. О математических способностях

Необходимость специальных способностей для изучения и понимания математики часто преувеличивают. Впечатление исключительной трудности математики иногда создается ее плохим, чрезмерно формальным изложением на уроке. Обычные средние человеческие способности вполне достаточны, чтобы при хорошем руководстве или по хорошим книгам не только усвоить математику, преподающуюся в средней школе, но и разобраться, например, в началах дифференциального и интегрального исчислений. Тем не менее, когда дело идет

о выборе математики в качестве основной специальности, вполне естественно желание проверить математические способности, или, как говорят иногда, математическую «одаренность». Ведь несомненно, что разные люди воспринимают математические рассуждения, решают математические задачи или — на более высокой ступени — приходят к новым математическим открытиям с различной скоростью, легкостью и успехом. И, конечно, следует стремиться к тому, чтобы из миллионов нашей молодежи специалистами-математиками становились именно те, кто в этой области будет работать наиболее успешно.

Поэтому содействие выдвижению математически одаренной молодежи является одной из важных задач школьных математических кружков, математических олимпиад и других мероприятий по пропаганде математических знаний и распространению интереса к самостоятельным занятиям математикой. Не следует спешить с чрезмерно ранним созданием для отдельных молодых людей репутации математических «талантов». Но вовремя подтолкнуть советом или премированием на олимпиаде способных математиков в сторону выбора математики в качестве своей дальнейшей работы необходимо.

В чем же заключаются эти способности? Следует прежде всего подчеркнуть, что успех в математике меньше всего основан на механическом запоминании большого числа фактов, отдельных формул и т. п. Хорошая память в математике, как и во всяком другом деле, является полезной, но никакой особенной, выдающейся памятью большинство крупных ученых-математиков не обладало.

В частности, фокусники, запоминающие длинные ряды многозначных чисел и складывающие или перемножающие их в уме, совсем не могут служить примером людей с хорошими математическими способностями в серьезном смысле слова.

Умение производить алгебраические вычисления, в смысле умелого преобразования сложных буквенных выражений, нахождения удачных путей для решения уравнений, не подходящих под стандартные правила, и т. п., уже ближе соприкасается с теми способностями, которые часто требуются от математика в серьезной научной работе.

Принято даже думать, что исключительно большое развитие таких вычислительных, или, иногда говорят, «алгоритмических» способностей, является характерным для одного из нескольких основных типов математической одаренности.

В школьной алгебре с трудностями, требующими для своего преодоления такого рода способностей, школьники прежде всего сталкиваются при разложении алгебраических выражений на множители. Среди задач на эту тему приведем две: *разложить на множители выражения* $x^5 + x + 1$ *и* $a^{10} + a^5 + 1$; эти задачи дают представление о том, что иногда разложение очень простых выражений на множители требует большого остроумия.

Далее основной областью применения этого рода способностей становится решение уравнений. Однако везде, где это возможно, математики стремятся сделать изучаемые ими проблемы геометрически наглядными. В средней школе достаточно ясно видно, насколько полезны графики для изучения свойств функций. Поэтому читатель не удивится утверждению, что геометрическое воображение, или, как говорят, «геометрическая интуиция», играет большую роль при работе почти во всех разделах математики, даже самых отвлеченных.

В школе обычно с большим трудом дается наглядное представление пространственных фигур. Надо, например, быть очень уж хорошим математиком (по сравнению с обычным школьным уровнем), чтобы, закрыв глаза, без чертежа ясно представить себе, *какой вид имеет пересечение поверхности куба с плоскостью, проходящей через центр куба и перпендикулярной одной из его диагоналей.*

В задаче: *В куб вложено два правильных тетраэдра так, что четыре вершины куба служат вершинами одного из них, а остальные четыре вершины куба — вершинами другого. Какую долю куба составляет объем общей части этих тетраэдров?* вся трудность заключается в том, чтобы наглядно понять, что за фигура получается при пересечении тетраэдров.

При решении следующих задач:

Около сферы описан пространственный четырехугольник. Доказать, что точки касания лежат в одной плоскости,

Доказать, что сумма расстояний от произвольной внутренней точки правильного тетраэдра до его граней есть величина постоянная,

Доказать, что прямые, соединяющие середину высоты правильного тетраэдра с вершинами основания, взаимно перпендикулярны

тоже очень существенна геометрическая интуиция, хотя здесь уже больше остается и на долю твердого знания тех

теорем, которые придется применить при доказательстве, и на долю умения логически рассуждать.

Искусство последовательного, правильно расчлененного логического рассуждения является также существенной стороной математических способностей.

В школе для развития этого искусства служит систематический курс геометрии с ее определениями, теоремами и доказательствами. Но часто наибольшую трудность для школьников в отношении понимания точного смысла сложной логической конструкции представляет принцип математической индукции, изучаемый в конце курса алгебры. Многие не в состоянии ясно увидеть реальное содержание этого принципа за нагромождением слов «если» и «то».

Понимание и умение правильно применять принцип математической индукции является хорошим критерием логической зрелости, которая совершенно необходима математику.

Умение последовательно, логически рассуждать в незнакомой обстановке приобретается с трудом. На математических школьных олимпиадах самые неожиданные трудности возникают именно при решении задач, в которых не предполагается никаких предварительных знаний из школьного курса, но требуется правильно уловить смысл вопроса и рассуждать последовательно. Уже такой шуточный вопрос затрудняет многих десятиклассников: *в хвойном лесу* 800 000 *елей и ни на одной из них не более* 500 000 *игл*; *доказать, что по крайней мере у двух елей число игл точно одинаково* (сравните с задачей: *в* 500 *ящиках лежат яблоки, причем в ящике помещается не более* 240 *яблок*; *доказать, что по крайней мере* 3 *ящика содержат по одинаковому числу яблок*). В следующих задачах:

Какое наибольшее число острых углов может иметь выпуклый многоугольник, имеющий n сторон? и

Доказать, что выпуклый 13-*угольник нельзя разрезать на параллелограммы*, а также в задаче

Сколько раз в сутки стрелки часов перпендикулярны друг другу?

тоже главная трудность не в сложности, а в необычности тех способов рассуждения, которые требуется применить.

Различные стороны математических способностей встречаются в разных комбинациях. Уже исключительное раз-

витие одной из них иногда позволяет приходить к неожиданным и замечательным открытиям, хотя чрезмерная односторонность, конечно, опасна. Само собой разумеется, что никакие способности не помогут без увлечения своим делом, без систематической повседневной работы.

Математические способности проявляются обычно довольно рано и требуют непрерывного упражнения. Полный отрыв от математики в течение нескольких лет после средней школы часто оказывается трудно поправимым. Работа чертежника, лаборанта, обращение с машиностроительными деталями, сборка радиоаппаратуры и т. п., по-видимому, содержат в себе много элементов, родственных с работой математика, например, в смысле развития пространственного воображения и функционального мышления. Соприкосновение на работе с современной техникой может пробудить более сознательный интерес к приложениям математики. Но мы очень советуем молодым людям, намеревающимся поступить на математическое отделение университета, проработав после школы несколько лет на производстве, заранее заниматься математикой и не только путем подготовки к вступительным экзаменам (для чего при всех университетах существуют специальные подготовительные курсы), но и путем участия в математических кружках и олимпиадах и самостоятельного чтения. Иначе никакие льготы для «производственников» при поступлении в вузы не помогут им во время работы в университете не отстать от своих товарищей, пришедших со свежими знаниями и увлечениями прямо из школы.

4.4. Математические кружки, олимпиады самостоятельное чтение. Подготовка к вступительным экзаменам в университеты

Преподавание в школе во время обязательных классных занятий рассчитано в основном на твердое усвоение математики всеми учащимися. Попробовать свои силы в решении более трудных задач, ближе познакомиться с тем, как наука справляется с решением более сложных математических проблем, и с тем, как математика применяется в естествознании и в технике, можно в математическом кружке. Такие кружки ведут преподаватели математики во многих школах. Силами университетов и педагогических институтов во многих городах органи-

зованы межшкольные математические кружки и систематическое чтение лекций для школьников по отдельным вопросам математики или ее истории.

Естественно, что все эти начинания, как и математические олимпиады, широко открыты и для работающей молодежи, интересующейся математикой.

Математические олимпиады, на которых предлагаются трудные задачи и «победителям» выдаются премии и похвальные отзывы, удаются там, где хорошо поставлена работа в кружках. Олимпиады должны проводиться для завершения работы, ведущейся в течение года, а не как изолированное праздничное мероприятие.

Задачи, предлагаемые в кружках и на олимпиадах, иногда носят искусственный и даже шуточный характер. В этом нет беды, если задачи подобраны так, что для их решения требуется серьезная работа мысли, похожая на ту, которая требуется от взрослого, самостоятельно работающего математика.

В докладах, читаемых в кружках их участниками, и в лекциях, читаемых учителями и преподавателями высшей школы, широко освещаются основные пути развития математической науки, значение математики для естествознания и техники. Конечно, очень хорошо, если удается в задачах, предлагаемых в кружках, дать принципиально важный или убедительный своей полезностью материал, но было бы напрасно требовать, чтобы таким условиям была подчинена вся та большая «тренировочная» работа молодого математика, которая достигается решением задач.

Независимо от участия в кружках можно заняться самостоятельным решением более трудных задач. Имеется много интересных сборников задач для любителей математики. Некоторые из них написаны так, что читатель, решая последовательно связанные друг с другом задачи, может живо представить себе пути развития довольно сложных математических теорий. Имеется также много вполне доступных книжек по отдельным вопросам математики. Некоторые из книжек, минуя, по возможности, технические трудности, вводят читателя в круг вопросов, служащих и в настоящее время предметом еще не законченного научного исследования.

Занятия в кружках, слушание лекций и чтение дополнительной литературы не должны, конечно, отвлекать учащихся школ или подготовительных курсов от более элементарной обязательной учебной работы. Следует по-

мнить, что для того, чтобы быть принятым в университет, прежде всего требуется твердое знание школьного курса и умение на основе этих знаний четко и уверенно решать более обычные, так сказать, стандартные задачи.

Если сравнить задачи, предлагавшиеся на экзаменах при поступлении на механико-математический факультет Московского государственного университета, с предлагавшимися на олимпиадах, то можно заметить их существенное отличие. Для решения экзаменационных задач не требуется какой-либо особой изобретательности. В большинстве случаев задачи решаются последовательным применением изучаемых в школе правил и приемов. Если же решение их и требует некоторой самостоятельности мысли, то дело ограничивается необходимостью систематически исследовать поставленный вопрос в самом естественном направлении. Например, приступая к решению следующей задачи:

Поместить внутри правильного шестиугольника со стороной 1 квадрат возможно бо́льших размеров. Найти сторону этого квадрата

следует ясно представить себе, как должен быть расположен в шестиугольнике искомый квадрат для того, чтобы его нельзя было увеличить, не выходя за пределы шестиугольника. Ясно, что для этого он должен упираться в периметр шестиугольника по меньшей мере двумя вершинами. Такие квадраты (у которых по меньшей мере две вершины лежат на периметре шестиугольника) надо подвергать более детальному исследованию. К сожалению, некоторые экзаменующиеся не могли преодолеть уже этого первого этапа и даже предлагали в качестве решения задачи чертежи, в которых квадрат свободно висел внутри шестиугольника, не прикасаясь к его периметру.

Иногда экзаменующимся с целью проверить на решении одной задачи их знание целого ряда формул, правил и теорем школьного курса экзаменаторы предлагают задачи со сложными формулировками условий, придавая им весьма искусственный и запутанный вид. Независимо от вопроса о правильности такой тенденции не следует чрезмерно бояться задач такого рода. По своей идее они обычно бывают даже значительно элементарнее задач с более короткими и красивыми формулировками. Все дело при решении таких комбинированных задач со сложно и запутанно формулируемыми условиями сводится

обычно к тому, чтобы правильно прочесть условия задачи и не запутаться в длинном ряде выкладок и рассуждений, каждое звено которых вполне элементарно, хотя и требует применения ряда формул и теорем из школьного курса.

Очень важно правильно распределить свои силы между твердым усвоением школьного курса, серьезным продумыванием наиболее существенных и трудных с идейной стороны узловых вопросов этого курса, тренировкой в решении задач конкурсного типа и (при наличии для этого свободного времени) развитием своих более самостоятельных интересов путем дополнительного чтения, участия в кружках и олимпиадах.

Мне хочется в заключение заметить, что по наблюдениям многих преподавателей Московского университета сборники конкурсных задач и материалы школьных кружков и олимпиад поселили в некоторой части нашей молодежи чрезмерный страх перед поступлением в университет (и, в частности, в Московский). Для каждого поступающего естественно желание достигнуть того, чтобы уверенно решать любую задачу конкурсного типа, но не следует думать, что в университеты принимают только решивших все предложенные на экзаменах задачи. Иногда оценки 5, 4, 3 соответствовали четырем, трем и двум решенным задачам. Решавшие менее двух задач, как правило, получали «двойку» и к дальнейшим экзаменам не допускались.

На устных экзаменах задача экзаменатора в советском вузе, вопреки распространенному воззрению школьников, состоит не в том, чтобы поскорее «срезать» незадачливого поступающего, а в том, чтобы тщательно взвесить, учитывая все обстоятельства экзаменационной обстановки, перспективы его дальнейшей работы по избранной им специальности. Нормы приема на первый курс наших вузов столь велики, что даже в Московском университете приемные и экзаменационные комиссии более всего озабочены тем, чтобы не потерять ни одного поступающего, достаточно подготовленного и способного серьезно работать на данном факультете. Между тем часто случается, что более боязливые молодые люди, подготовленные не хуже других, предпочитают подавать заявления не туда, куда им хочется попасть, а туда, где, по их сведениям, конкурс поменьше.

4.5. Элементарная и высшая математика

> Поворотным пунктом в математике была декартова *переменная величина*. Благодаря этому в математику вошли *движение* и *диалектика* и благодаря этому же стало *немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление*.
>
> Лишь дифференциальное исчисление дает естествознанию возможность изображать математически не только *состояния*, но и *процессы*: движение.
>
> Ф. Энгельс. Диалектика природы

Отмечаемый в этих словах Энгельса поворот в математике произошел в XVII в. одновременно с созданием основ математического естествознания. Значение этого поворота настолько велико, что до настоящего времени образовавшиеся в результате этого поворота разделы математики объединяют под названием «высшей математики», в отличие от сложившейся ранее «элементарной математики».

Некоторые основные понятия высшей математики вошли в настоящее время *) в программы средней школы, где основательно изучаются функциональные зависимости между переменными величинами и сообщаются некоторые сведения из теории пределов. Однако дифференциальное и интегральное исчисления, на которые опирается большинство наиболее серьезных и важных применений математики к естествознанию и технике, остаются за рамками программы средней школы.

Редко выбирают начала дифференциального и интегрального исчислений и в качестве предмета занятий в школьных математических кружках, так как в них обычно стремятся предлагать такой материал, который после сравнительно коротких вводных объяснений позволяет сразу взяться за самостоятельное решение задач; изучение же начал дифференциального и интегрального исчислений требует довольно длительной систематической работы. С другой стороны, сила и общность метода диф-

---

*) Речь идет о конце 50-х — начале 60-х годов.— *Примеч. сост.*

ференциального и интегрального исчислений таковы, что, не ознакомившись с ними, нельзя как следует понять все значение математики для естествознания и техники и даже полностью оценить всю красоту и увлекательность самой математической науки. Например, в рамках элементарной математики нахождение и доказательство формул для объемов сколько-либо сложных фигур или площадей поверхностей представляется чрезвычайно трудным. Уже объем пирамиды, как известно, доставляет школьникам много мучений. Вывод формул объема конуса $V = {}^1/_3\pi R^2 H$, объема шара $V = {}^4/_3\pi R^3$ или поверхности шара $S = 4\pi R^2$ не менее сложен. Особенно неприятно то, что вывод каждой из этих формул требует своеобразных приемов и не дает представления о том, как справиться с задачами на нахождение площадей или объемов, не разобранных в учебнике геометрии. Но стоит познакомиться с началами интегрального исчисления, как обнаруживается, что, например, объемы всех тел вращения находятся при помощи интегрирования однообразным, простым и вполне естественным способом. При владении интегральным исчислением в принципе не представляют затруднений и любые другие задачи на определение площадей или объемов: все они делаются именно задачами, доступными решению определенным методом, в то время как в пределах элементарной математики каждая из приведенных выше формул являлась теоремой со своим собственным приемом доказательства.

Элементарные приемы решения задач на «максимум» или «минимум» являются сложной и весьма хитроумной наукой. Все это нагромождение своеобразных и тонких приемов оказывается в большинстве случаев совершенно излишним, если пользоваться дифференциальным исчислением. В этого рода применениях высшей математики разобраться еще проще, так как здесь требуется только ознакомиться с понятием производной, излагаемым в самом начале дифференциального исчисления, научиться вычислять производные простейших функций и ознакомиться с правилами применения производных к нахождению максимумов и минимумов.

Понятие производной $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ от функции $y = f(x)$ по своему наглядному содержанию очень просто; если считать независимое переменное x *временем*, то производная f' окажется просто *скоростью изменения зависимого переменного* y. Этим и объясняется основная

роль понятия производной при изучении процессов изменения величин во времени.

Если обратиться к механике, то уже такая простая задача, как вывод найденного Галилеем закона падения тел, находит вполне удовлетворительное решение только при использовании средств высшей математики. Вывод хорошо известной формулы $s = {}^1/_2 gt^2$ для пути, пройденного телом за время t при свободном падении в пустоте (g — ускорение силы тяжести), который дается в элементарных учебниках физики, страдает некоторой сложностью и искусственностью. Но достаточно усвоить, что *скорость есть производная от пройденного пути по времени*: $v = \frac{ds}{dt}$, *а ускорение — производная по времени от скорости*: $g = \frac{dv}{dt}$, и ознакомиться с простейшими правилами интегрирования, как все сведется к очень простому вычислению:

$$v = \int_0^t g\,dt = gt, \quad s = \int_0^t v\,dt = \int_0^t gt\,dt = \frac{1}{2} gt^2.$$

В большом числе более сложных задач механики и физики основные законы течения изучаемых явлений тоже могут быть очень просто выражены при помощи уравнений, связывающих изучаемые величины с их производными по времени. Уравнения, связывающие искомые функции с их производными, называются *дифференциальными*.

При помощи дифференциальных уравнений сравнительно просто записываются законы движения небесных тел под действием всемирного тяготения, закономерности работы самых различных радиотехнических схем, закономерности распределения напряжений в различных механических конструкциях и т. д. Разработка методов решения таких уравнений и является одной из основных задач, которые естествознание и техника ставят математике.

Основательно изучить дифференциальное и интегральное исчисления до высшей школы довольно трудно. Еще труднее сколько-нибудь заметно продвинуться в теории решения дифференциальных уравнений. Однако тем, кого математика может увлечь и заинтересовать именно с этой стороны, можно все же попробовать ознакомиться с простейшими понятиями дифференциального и интеграль-

ного исчислений параллельно с окончанием средней школы *). Во всяком случае, таков был путь к математике многих наших ученых, причем для некоторых из них именно знакомство с высшей математикой и было решающим аргументом для того, чтобы окончательно остановиться на математике в качестве своей специальности. Можно с этой целью обратиться к замечательной книге Р. Куранта и Г. Роббинса «Что такое математика. Элементарный очерк идей и методов» (М.; Л: Гостехиздат, 1947) или сразу читать какой-либо из сравнительно доступных учебников для вузов.

Тому, кто не решится на такой труд, приведенные здесь краткие замечания помогут понять, насколько шире и интереснее, чем можно заранее себе представить, перспективы, которые откроются ему при дальнейшем изучении математики.

4.6. Современная машинная математика**) и кибернетика

Современная математическая теория дает средства, в принципе достаточные для решения самых разнообразных задач. Уже на первом курсе университета студенты знакомятся с методами нахождения с любой заданной точностью корней алгебраических уравнений какой угодно высокой степени. При изучении теории дифференциальных уравнений обнаруживается, что существуют общие методы нахождения их решений, хотя и приближенных, но тоже обладающих любой наперед заданной точностью.

Однако при практическом решении таких задач с целью получить определенный числовой результат обнаруживается, что обладать принципиальной схемой решения еще не достаточно. Например, при расчете траектории артиллерийского снаряда эта траектория разбивается на много десятков коротких отрезков, которые рассчитываются последовательно. Для расчета каждого следующего участка приходится проделать несколько десятков арифметических действий. Расчет одной траектории даже у вычислителя, пользующегося вспомогательными таб-

*) Еще раз напомним, что текст написан А. Н. Колмогоровым в 1959 г. В нынешней школьной программе имеются элементы высшей математики. — *Примеч. сост.*

**) Имеется в виду машинная математика 50-х годов. — *Примеч. сост.*

лицами и арифмометром, занимает много часов и даже несколько дней.

Кораблестроительные расчеты или расчеты, связанные с постройкой плотин больших электростанций, занимают месяцы и даже годы работы специальных вычислительных бюро. Такое положение, естественно, привело к необходимости усовершенствововать машинную вычислительную технику. Прежде всего, наряду с обычными арифмометрами получили широкое распространение «малые вычислительные машины», выполняющие автоматически четыре арифметических действия над многозначными числами. Перемножение двух восьмизначных чисел занимает на такой машине 40 секунд.

При использовании этих машин вычислитель принужден еще записывать результаты каждого действия, потом вновь вводить их в машину. За последние 20 лет широко развернулась работа по созданию «больших» вычислительных машин», которые без вмешательства человека выполняют длинные ряды арифметических действий.

Программа работы такой машины задается пробитием дырочек на бумажной ленте. Машина сама выполняет в указанном порядке арифметические действия, фиксирует промежуточные результаты, использует их в дальнейших вычислениях и, наконец, выдает окончательный результат пробитым на ленте или карточках или даже отпечатанным.

Сначала в подобных сложных вычислительных машинах использовались механические элементы типа колесиков обычного арифмометра и электромагнитные реле, замыкающие и размыкающие ток, приводящий в движение элементы машины. Полный переворот в вычислительной технике произошел около десяти лет назад *), когда было показано, что возможно обойтись совсем без механического перемещения элементов машины, заменив их электронными лампами (диодами, триодами и т. д.) и их комбинациями (триггерами и т. п.). Благодаря этому стало возможным производить в одну секунду, например, по несколько тысяч умножений многозначных чисел. Еще несколько позднее электронные лампы стали заменяться полупроводниковыми элементами, имеющими значительно меньшие размеры, для «запоминания» большого числа промежуточных данных (до нескольких сотен тысяч) были введены магнитные барабаны и т. д. Стало

*) Речь идет о конце 40-х годов.— *Примеч. сост.*

возможным делать вычисления, требующие, например, 20 миллионов операций для предсказания по данным метеорологических станций погоды на следующий день, вычислять траекторию снаряда за время, меньшее времени его полета и т. д.

Большие вычислительные машины иногда специально строятся для какой-либо одной цели (например, для предсказания погоды), но чаще имеют универсальный характер, т. е. предназначаются для решения самых разнообразных задач. В этом случае они размещаются в «вычислительных центрах», обслуживающих различные научные и технические учреждения, не имеющие собственных больших вычислительных машин. Часто вычислительные машины подключаются к приборам, управляющим автоматически тем или иным процессом. Если управление быстро протекающим процессом требует сложных вычислений, основанных на данных, получаемых в ходе этого процесса, то без скоростных вычислительных машин подобная задача была бы вообще неосуществима. Сфера применения таких управляющих машин быстро растет.

Управляющие машины во многом походят на управляющие механизмы, возникшие естественным образом в ходе эволюции живых существ (нервная система, механизм сохранения и передачи по наследству признаков каждого вида животных и растений). Общие закономерности устройства управляющих систем изучаются недавно возникшими науками: теорией информации и кибернетикой, которые в значительной своей части являются математическими и предъявляют к чистой математике много новых запросов.

5. ГЕОМЕТРИЯ НА СФЕРЕ И ГЕОЛОГИЯ

Вероятно, многие читатели слышали о теории Вегенера, согласно которой материки способны передвигаться по земной поверхности, сохраняя свою форму. Одним из аргументов в пользу теории Вегенера с момента ее создания (1912 год) было сходство очертаний восточных и западных берегов Атлантического океана. Особенно бросается в глаза то, что Южную Америку можно так придвинуть к берегам Африки, что восточная оконечность Южной Америки (мыс Сан-Роки) войдет в Гвинейский залив и контуры берегов на большом протяжении почти совместятся.

Еще сам Вегенер заметил, что при таких сопоставлениях более логично иметь дело не с береговой линией, а с так называемым материковым склоном. Дело в том, что материки окружены занимающей довольно большую площадь «материковой отмелью» с глубинами до 200 метров. По существу, это затопленная морем часть материка. Если читатели посмотрят в Большой Советской Энциклопедии карту Атлантического океана, то они убедятся, что площадь с глубинами 0—200 метров вблизи материков довольно велика, площадь же с глубинами 200 — 1000 метров значительно меньше. В этой полосе с глубинами в 200—1000 метров, относящейся к материковому склону, и следует провести линию, которую естественно считать «границей материка». Мы увидим далее, что при таком подходе соответствие между восточными и западными границами Атлантического океана делается еще более поражающим.

Однако производить сравнение очертаний материков по карте не вполне правильно. Хорошо известно, что поверхность сферы нельзя изобразить на плоскости без искажений. В 1958 году Кери (S. W. Carey) устранил это затруднение, изготовив подвижные прозрачные накладки на глобус, вырезанные по очертаниям материков, и показал, что при надлежащем перемещении они очень хорошо прилегают друг к другу.

По существу, точность сопоставления, которой можно достигнуть таким наивным способом, кажется вполне достаточной. Тем не менее некоторые крупные авторитеты отнеслись к сопоставлениям Кери с недоверием. Поэтому несколько английских исследователей — Буллард, Эверетт и Смит — решили провести точные вычисления. Вычисления относились к контурам материков, проведенным по линиям глубин в 100, 500 и 1000 метров. Расчетным путем находились такие смещения материков, при которых несоответствие сдвинутых контуров оказывалось наименьшим. В работе Bullard E., Everett I. E., Smith A. G. The fit of the continent around Atlantic // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 1965.— Series A. V. 258. P. 41—45 точно объяснена методика вычислений по «методу наименьших квадратов».

Наилучшие результаты получаются, если считать границей материка линию глубин в 500 метров. Южная Атлантика почти полностью «закрывается» при надвигании Южной Америки на Африку. Чтобы получить

столь же хороший результат для Северной Атлантики, приходится подвергать различным смещениям по отношению к Африке Европу (отдельно Испанию), Гренландию и Северную Америку.

О результате читатели могут судить сами, рассматривая рисунок на третьей странице обложки. Красным закрашены «перекрытия», синим — оставшиеся промежутки. На поверхности материков нанесена обычная сетка меридианов и широтных кругов, соответствующая их реальному положению до сдвигов.

Чисто геометрический подход авторов к геологии, конечно, является слишком упрощенным. При движении материки, несомненно, деформируются. Известно, например, сколь большая площадь равнин «сминается» при горообразовании. Тем не менее удача описанного чисто геометрического эксперимента представляется достаточно поучительной.

6. АВТОМАТЫ И ЖИЗНЬ

Мой доклад «Автоматы и жизнь», подготовленный для семинара научных работников и аспирантов механико-математического факультета Московского государственного университета, вызвал интерес у самых широких кругов слушателей. Популярное изложение доклада подготовлено моей сотрудницей по лаборатории вероятностных и статистических методов МГУ Н. Г. Рычковой. Изложение это во всех существенных чертах правильно, хотя иногда словесное оформление мысли, а следовательно, и некоторые ее оттенки принадлежат Н. Г. Рычковой.

Подчеркну основные идеи доклада, имеющие наиболее широкий интерес.

I. Определение жизни как «особой формы существования белковых тел» (Энгельс) было прогрессивно и правильно, пока мы имели дело только с конкретными формами жизни, развившимися на Земле. В век космонавтики возникает реальная возможность встречи с «формами движения материи» (см. статью «Жизнь» в Большой Советской Энциклопедии), обладающими основными практически важными для нас свойствами живых и даже мыслящих существ, устроенных иначе. Поэтому приобретает вполне реальное значение задача более общего определения понятия жизни.

II. Современная электронная техника открывает весьма широкие возможности моделирования жизни и мышления. Дискретный (арифметический) характер современных вычислительных машин и автоматов не создает в этом отношении существенных ограничений. Системы из очень большого числа элементов, каждый из которых действует чисто «арифметически», могут приобретать качественно новые свойства.

III. Если свойство той или иной материальной системы «быть живой» или обладать способностью «мыслить» будет определено чисто функциональным образом (например, любая материальная система, с которой можно разумно обсуждать проблемы современной

науки или литературы, будет признаваться мыслящей), то придется признать в принципе вполне осуществимым искусственное создание живых и мыслящих существ.

IV. При этом, однако, следует помнить, что реальные успехи кибернетики и автоматики на этом пути значительно более скромны, чем иногда изображается в популярных книгах и статьях. Например, при описании «самообучающихся» автоматов или автоматов, способных «сочинять» музыку или писать стихи, иногда исходят из крайне упрощенного представления о действительном характере высшей нервной деятельности человека и, в частности, творческой деятельности.

V. Реальное продвижение в направлении понимания механизма высшей нервной деятельности, включая и высшие проявления человеческого творчества, естественно, не может ничего убавить в ценности и красоте творческих достижений человека. Я думаю, что это и хотела сказать редакция журнала «Техника—молодежи», сделав лозунг «Материализм — это прекрасно!» одним из подзаголовков в изложении моего доклада.

25 августа 1961 г.

* * *

Я принадлежу к тем крайне отчаянным кибернетикам, которые не видят никаких принципиальных ограничений в кибернетическом подходе к проблеме жизни и полагают, что можно анализировать жизнь во всей ее полноте, в том числе и человеческое сознание со всей его сложностью, методами кибернетики.

Очень часто задают такие вопросы:

— Могут ли машины воспроизводить себе подобных и может ли в процессе самовоспроизведения происходить прогрессивная эволюция, приводящая к созданию машин, существенно более совершенных, чем исходные?

— Могут ли машины испытывать эмоции: радоваться, грустить, быть недовольными чем-нибудь, чего-нибудь хотеть?

— Могут ли, наконец, машины сами ставить перед собой задачи, не поставленные перед ними их конструкторами?

Иногда пытаются отделаться от этих вопросов или обосновать отрицательные ответы на них, предлагая, например, определить понятие «машина» как нечто, каждый раз искусственно создаваемое человеком. При таком определении часть вопросов, скажем первый, автоматически отпадает. Но вряд ли можно считать разумным упорное нежелание разобраться в вопросах, действительно интересных и сложных, прикрываясь насильственно ограниченным пониманием терминов.

Вопрос о том, можно ли на пути кибернетического подхода к анализу жизненных явлений создать подлинную,

настоящую жизнь, которая будет самостоятельно продолжаться и развиваться, остается насущной проблемой современности. Уже сейчас он актуален, годен для серьезного обсуждения, ибо изучение аналогий между искусственными автоматами и настоящей живой системой уже сейчас служит принципом исследования самих явлений жизни, с одной стороны, и способом, помогающим изыскивать пути создания новых автоматов — с другой.

Есть и другой способ сразу ответить на все эти вопросы. Он заключается в ссылке на математическую теорию алгоритмов. Математикам хорошо известно, что в пределах каждой формальной системы, достаточно богатой математически, можно сформулировать вопросы, которые кажутся содержательными, осмысленными и должны предполагать наличие определенного ответа, хотя в пределах данной системы такого ответа найти нельзя. Вот поэтому-то и провозглашается, что развитие самóй формальной системы есть задача машины, а обдумывание правильного ответа на вопрос — это уже дело человека, преимущественное свойство человеческого мышления.

Такая аргументация, однако, использует идеализированное толкование понятие «мышление», с помощью которого можно легко доказать, что не только машина, но и сам человек мыслить не могут. Здесь предполагается, что человек может давать правильные ответы на любые вопросы, в том числе и на поставленные неформально, а мозг человека способен производить неограниченно сложные формальные выкладки. Между тем нет никаких оснований представлять себе человека столь идеализированным образом — как бесконечной сложности организм, в котором умещается бесконечное количество истин. Чтобы достичь такого положения, заметим в шутку, пришлось бы расселить человечество по звездным мирам, чтобы, пользуясь бесконечностью мира, организовать формальные логические выкладки в бесконечном пространстве и даже передавать их по наследству. Тогда можно было бы считать, что любой математический алгоритм человечество может развить до бесконечности.

Но вряд ли эта аргументация имеет отношение к реальному вопросу. И уж во всяком случае это не возражение против постановки вопроса о том, возможно ли создание искусственных живых существ, способных к размножению и прогрессивной эволюции, в высших формах обладающих эмоцией, волей и мышлением.

Этот же вопрос поставлен изящно, но формально математиком Тьюрингом в его книге «Может ли машина мыслить?». Можно ли построить машину, которую нельзя было бы отличить от человека? Такая постановка как будто ничуть не хуже нашей и к тому же проще и короче. На самом же деле она не вполне отражает суть дела. Ведь, по существу, интересен не вопрос о том, можно ли создать автоматы, воспроизводящие известные нам свойства человека; хочется знать, можно ли создать новую жизнь, столь же высокоорганизованную, хотя, может быть, очень своеобразную и совсем непохожую на нашу. В современной научной фантастике сейчас появляются произведения, затрагивающие эти темы. Интересен и остроумен рассказ «Друг» в сборнике Станислава Лема «Вторжение с Альдебарана» о машине, пожелавшей управлять человечеством. Однако фантазия романистов не отличается особой изобретательностью. И. А. Ефремов, например, выдвигает концепцию, что «все совершенное похоже друг на друга». Стало быть, у высокоорганизованного существа должны быть, по его мнению, два глаза и нос, хотя, может быть, и несколько измененной формы. В век космонавтики не праздно предположение, что нам, возможно, придется столкнуться с другими живыми существами, весьма высокоорганизованными и в то же время совершенно на нас непохожими. Сможем ли мы установить, каков внутренний мир этих существ, способны ли они к мышлению, присущи ли им эстетические переживания, идеалы красоты или чужды и т. п. Почему бы, например, высокоорганизованному существу не иметь вид тонкой пленки — плесени, распластанной на камнях?

6.1. Что такое жизнь? Возможно ли искусственное разумное существо?

Поставленный нами вопрос тесно связан с другими: а что такое жизнь, что такое мышление, что такое эмоциональная жизнь, эстетические переживания? В чем, скажем, состоит отличие последних от простых элементарных удовольствий — от пирога, например, или еще чего-нибудь в этом роде? Если говорить в более серьезном тоне, то можно сказать следующее: точное определение таких понятий, как *воля*, *мышление*, *эмоции*, еще не удалось сформулировать. Но на естественнонаучном уровне строгости такое определение возможно. Если мы

не признаем эту возможность, мы окажемся безоружными против аргументов солипсизма.

Хотелось бы научиться на основании фактов поведения, например, делать выводы о внутреннем состоянии живого высокоорганизованного существа.

Как изучать высшую нервную деятельность, используя кибернетический подход? Здесь открываются следующие пути: во-первых, можно детально изучать само поведение животных или человека; во-вторых, изучать устройство их мозга; можно, наконец, иногда довольствоваться и так называемым симпатическим пониманием. Если, скажем, просто внимательно наблюдать кошку или собаку, то, и не зная науки о поведении и условных рефлексах, можно прекрасно понять, что они думают и чего хотят. Несколько труднее достигнуть такого понимания с птицами или, например, с рыбами, но вряд ли и это невозможно. Это вопрос не новый, частично он уже решен, частично легко решаем, частично — трудно. Опыт индуктивного развития науки говорит нам, что все вопросы, долго не находившие решения, постепенно разрешаются, и вряд ли нужно думать, что именно здесь существуют заранее установленные пределы, дальше которых продвинуться нельзя.

Если считать, что анализ любой высокоорганизованной системы естественно входит в состав кибернетики, придется отказаться от распространенного мнения, что основы кибернетики включают в себя лишь изучение систем, имеющих заранее назначенные цели. Часто кибернетику определяют как науку, занимающуюся изучением управляющих систем. Считается, что все такие системы обладают общими свойствами и свойство номер один у них — наличие цели. Это верно лишь до тех пор, пока все, что мы выделяем в качестве организованных систем, управляющих собственной деятельностью, похоже на нас самих. Однако если мы хотим методами кибернетики изучать происхождение таких систем, их естественную эволюцию, то такое определение становится узким. Вряд ли кибернетика поручит какой-либо другой науке выяснять, каким образом обычная причинная связь в сложных системах путем естественного развития приводит к возможности рассматривать всю систему как действующую целесообразно.

Обычно понятие «действовать целесообразно» включает умение охранять себя от разрушающих внешних воздействий или, скажем, способность содействовать своему

размножению. Спрашивается: кристаллы действуют целесообразно или нет? Если «зародыш» кристалла поместить в некристаллическую среду, будет ли он развиваться? Ведь никаких отдельных органов у кристалла различить невозможно, стало быть, это есть некая промежуточная форма. И существование таковых неизбежно.

По-видимому, частные задачи, подобные этой, будут решать науки, непосредственно с ними связанные. Опытом частных наук никак нельзя пренебрегать. Но исключить из содержания кибернетики общие представления о причинных связях в целесообразно действующих системах, ставящих себе цели, так же нельзя, как нельзя, например, уже при имитации жизни автоматами не считаться, скажем, с тем, что и сами эти цели меняются в процессе эволюции, а вместе с этим изменяется и представление о них.

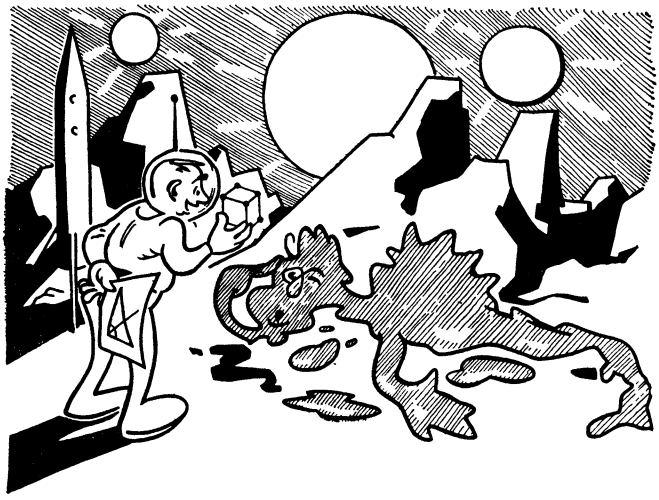
Когда говорят, что организация механизма наследственности, позволяющего живым организмам передавать свое целесообразное устройство потомкам, имеет целью воссоздать данный вид, придать ему определенные свойства, а также возможности изменчивости, прогрессивной эволюции, то кто же ставит эту цель? Или если рассматривать систему в целом, то кто же, как не она сама, ставит перед собой цель развития путем отсеивания негодных экземпляров и размножения совершенных?

Подводя итоги, можно сказать, что изучение в общей форме возникновения систем, в которых применимо понятие целесообразности, есть одна из главных задач кибернетики. При этом изучение в общей форме естественно предполагает знание, отвлеченное от деталей физического осуществления, от энергетики, химии, возможностей техники и т. п. Нас здесь интересует только, как возникает возможность сохранять и накапливать информацию.

Такая широкая постановка задачи содержит в себе много трудностей, но отказаться от нее на современном этапе развития науки уже невозможно.

Если признавать важность задачи определения в объективных обобщенных терминах существенных свойств внутренней жизни (высшей нервной деятельности) какой-то незнакомой нам и непохожей на нас высокоорганизованной системы, то нельзя ли тот же путь предложить и в применении к нашей системе — человеческому обществу? Хотелось бы на общем языке, одном и том же для всех высокоорганизованных систем, уметь описывать и все

явления жизни человеческого общества. Представим себе воображаемого постороннего наблюдателя нашей жизни, который совершенно не обладает ни симпатиями к нам, ни умением понять, что мы думаем и переживаем. Он просто наблюдает большое скопление организованных существ и желает понять, как оно устроено. Совершенно так же, как, скажем, мы наблюдаем муравейник. Через некоторое время он, пожалуй, без особого труда сможет



понять, какую роль играет информация, содержащаяся, например, в железнодорожных справочниках (человек теряет такой справочник и не может попасть на нужный поезд). Правда, наблюдателю пришлось бы столкнуться с большими трудностями. Как, например, понять ему следующую картину: множество людей приходит вечером в большое помещение, несколько человек поднимаются на возвышение и начинают делать беспорядочные движения, а остальные сидят при этом спокойно; по окончании люди расходятся без всякого обсуждения. Один из молодых математиков, может быть в шутку, приводит и другой пример необъяснимого поведения: люди заходят в помещение, там получают бутылки с некоей жидкостью, после чего начинают бессмысленно жестикулировать. Постороннему наблюдателю будет трудно установить, что же это такое — просто разлад в машине, какая-то пауза в ее непрерывной осмысленной работе, или же

можно описать, что происходит в этих двух случаях, и установить разницу между ними.

Оставив шутливый тон, сформулируем серьезно возникающую здесь проблему: нужно научиться в терминах поведения осуществлять объективное описание самого механизма, это поведение обусловливающего, уметь различать отдельные виды деятельности высокоорганизованной системы. Впервые в нашей стране И. П. Павлов установил возможность объективного изучения поведения животных и человека, а также регулирующих это поведение мозговых процессов без всяких субъективных гипотез, выраженных в психологических терминах. Глубокое изучение предложенной проблемы есть не что иное, как павловская программа анализа высшей нервной деятельности в ее дальнейшем развитии.

Создание высокоорганизованных живых существ превосходит возможности техники наших дней. Но всякие ограничительные тенденции, всякое неверие или даже утверждение невозможности на рациональных путях достичь объективного описания человеческого сознания во всей его полноте сейчас явились бы тормозом в развитии науки. Разрешение этой проблемы необходимо, ибо уже истолкование разных видов деятельности может служить толчком для развития машинной техники и автоматики. С другой стороны, возможности объективного анализа нервной системы сейчас столь велики, что не хочется заранее останавливаться перед задачами любой трудности.

Если технические трудности будут преодолены, то вопрос о практической целесообразности осуществления соответствующей программы работ останется по меньшей мере спорным.

Однако в рамках материалистического мировоззрения не существует никаких состоятельных принципиальных аргументов против положительного ответа на наш вопрос. Более того, этот положительный ответ является сейчас современной формой убеждений о естественном возникновении жизни и материальной основе сознания.

6.2. Дискретна или непрерывна мысль?

В кибернетике и теории автоматов сейчас наиболее разработана теория работы дискретных устройств, т. е. таких устройств, которые состоят из большого числа отдельных элементов и работают отдельными тактами. Каждый элемент может находиться в небольшом чис-

ле состояний, и изменение состояния отдельного элемента зависит от предыдущих состояний сравнительно небольшого числа элементов. Так устроены электронные машины, так, предположительно, устроен и человеческий мозг. Считается, что мозг имеет таких отдельных элементов — нервных клеток 10^{10}, а может быть, и еще больше. Несколько проще, но еще более грандиозно в смысле объема устроен аппарат наследственности.

Иногда делают вывод, что кибернетика должна заниматься лишь дискретными устройствами. Против такого подхода есть два возражения. Во-первых, реальные сложные системы — как многие машины, так и все живые существа — действительно имеют определенные устройства, основанные на принципе непрерывного действия. Что касается машин, то таким примером может служить, скажем, руль автомобиля и т. п. Если мы обратимся к человеческой деятельности — сознательной, но не подчиненной законам формальной логики, т. е. деятельности интуитивной или полуинтуитивной, например к двигательным реакциям, то мы обнаружим, что большое совершенство и отточенность механизма непрерывного движения построены на движениях непрерывно-геометрического характера. Если человек совершает тройной прыжок или прыжок с шестом или, например, готовится к дистанции слалома, его движение должно быть заранее намечено как непрерывное (для математиков: путь слаломиста оказывается даже аналитической кривой). Можно полагать, однако, что это не есть радикальное возражение против дискретных механизмов. Скорее всего интуиция непрерывной линии в мозге осуществляется на базе дискретного механизма.

Второе возражение против дискретного подхода заключается в следующем: заведомо человеческий мозг и даже, к сожалению, часто вычислительные машины, отнюдь не всегда действуют детерминированно — полностью закономерным образом. Результат их действия в некоторый момент (в данной ячейке) нередко зависит от случая. Желая обойти эти возражения, можно сказать, что и в автоматы можно «ввести случайность». Вряд ли имитирование случайности (т. е. замена случая какими-то закономерностями, не имеющими отношения к делу) может принести сколько-нибудь серьезный вред при моделировании жизни. Правда, вмешательство случайности часто рассматривается несколько примитивно: заготавливается достаточно длинная лента случайных чисел, которая затем исполь-

зуется для имитации случая в различных задачах. Но при частом употреблении эта заготовленная «случайность» в конце концов перестает быть случайностью. Исходя из этих соображений, к вопросу имитации случая на автоматах следует подходить с большой осторожностью. Однако принципиально это вещь во всяком случае возможная.

Только что изложенная аргументация приводит нас к следующему основному выводу.

Несомненно, что переработка информации и процессы управления в живых организмах построены на сложном переплетении дискретных (цифровых) и непрерывных механизмов, с одной стороны, детерминированного и вероятностного принципов действия — с другой.

Однако дискретные механизмы являются ведущими в процессах переработки информации и управления в живых организмах. Не существует состоятельных аргументов в пользу принципиальной ограниченности возможностей дискретных механизмов по сравнению с непрерывными.

6.3. Что такое «очень много»?

Часто, сомневаясь в возможности моделировать человеческое сознание на автоматах, говорят, что количество функций высшей нервной деятельности человека необъятно велико и никакая машина не может стать моделью сознательной человеческой деятельности в полном ее объеме. Одних только нервных клеток в коре головного мозга 10^{10}. Каково же должно быть число элементов в машине, имитирующей всю сложную высшую нервную деятельность человека?

Эта деятельность, однако, связана не с разрозненными нервными клетками, а с довольно большими агрегатами их. Невозможно представить себе, чтобы, скажем, какая-нибудь математическая теорема «сидела» в одной-единственной, специально для нее заготовленной нервной клетке или даже в каком-то определенном числе их. По-видимому, дело обстоит совершенно иначе. Наше сознание оперирует небольшими количествами информации. Количество единиц информации, которое человек воспринимает и перерабатывает в секунду, совсем невелико. Вот один несколько парадоксальный пример: слаломист, преодолевая дистанцию, в течение десяти секунд воспринимает и перерабатывает значительно большую информацию, чем

при других, казалось бы, более интеллектуальных видах деятельности, во всяком случае больше, чем математик пропускает через свою голову за сорок секунд напряженной работы мысли. Вообще, вся сознательная жизнь человека устроена как-то очень своеобразно и сложно, но когда закономерности ее будут изучены, для моделирования ее потребуется гораздо меньше элементарных ячеек, чем для моделирования всего мозга, как это ни удивительно.

Какие же объемы информации могут создавать уже качественное своеобразие сложных явлений, подобных жизни, сознанию и т. п.?

Можно разделить все числа на малые, средние, большие и сверхбольшие. Эта классификация нестрога, в рамках ее нельзя будет сказать, что такое-то число, например, среднее, а следующее за ним — уже большое. Здесь числа делятся на категории с точностью до порядка величин. Но большая строгость нам здесь и не нужна. Каковы же эти категории? Начнем с определений, понятных лишь математикам.

I. *Число* А *назовем малым, если практически возможно перебрать все схемы из* А *элементов с двумя входами и выходами или выписать для них все функции алгебры логики с* А *аргументами.*

II. *Число* Б *называется средним, если мы оказываемся не в состоянии перебрать практически все схемы из* Б *элементов, а можем перебрать лишь сами эти элементы или (что чуть-чуть сложнее) выработать систему обозначений для любой системы из* Б *элементов.*

III. *И, наконец, число* В — *большое, если мы не в состоянии практически перебрать такое число элементов, а можем лишь установить систему обозначений для этих элементов.*

IV. *Числа будут сверхбольшими, если практически и этого нельзя сделать; они нам, как мы увидим дальше, и не понадобятся.*

Поясним теперь эти определения на доступных примерах.

Пусть к одной электрической лампочке подсоединено три выключателя, каждый из которых может находиться в левом (Л) или правом (П) положении. Тогда, очевидно, возможных совместных положений трех выключателей будет $2^3 = 8$. Перечислим их для наглядности:

1) ЛЛЛ 3) ЛПП 5) ПЛЛ 7) ПЛП
2) ЛПЛ 4) ЛЛП 6) ППЛ 8) ППП.

Проводку к нашим выключателям можно сделать таким образом, что в каждом из выписанных положений лампочка может как гореть, так и не гореть. Если произвести подсчет, то окажется, что различных положений выключателей, сопровожденных такими отметками, будет 2^{2^3}, т. е. $2^8 = 256$. Справедливость этого последнего утверждения читатель без труда может проверить самостоятельно,

дополняя выписанные положения выключателей знаками «горит», «не горит».

Тот факт, что такое упражнение под силу читателю и не займет у него слишком много времени, и убеждает нас в том, что число 3 (число выключателей) относится к малым. Если бы выключателей было не 3, а, скажем, 5, то пришлось бы выписать $2^{2^5} = 4\ 294\ 967\ 296$ различных совместных положений выключателей, сопровожденных отметками «горит», «не горит». Вряд ли можно за какое-нибудь разумное время практически проделать все это не сбившись. Поэтому число 5 уже нельзя считать малым.

Чтобы стал понятен термин «среднее число», приведем другой пример. Представьте себе, что вас ввели в помещение, где находится 1000 человек, и предложили с каждым из них поздороваться за руку. Правда, ваша рука после таких упражнений будет чувствовать себя неважно, но практически (по времени) проделать такое упражнение вполне возможно. Вы вполне сумеете, не сбившись, подойти к каждому из тысячи и протянуть ему руку. А если бы последовало предложение всей тысяче присутствую-

щих обменяться друг с другом рукопожатиями, да еще каждой компании из трех человек внутри своего кружка дополнительно обменяться рукопожатиями и т. д., то это оказалось бы немыслимым. Число 1000 и есть среднее. Можно сказать, что мы «перебрали» тысячу элементов, отметив при этом каждого (рукопожатием).

Совсем простым примером большого числа является число видимых звезд на небосклоне. Каждый знает, что невозможно пересчитать звезды пальцем, а тем не менее существует каталог звездного неба (т. е. выработана система обозначений), пользуясь которым мы в любой момент можем получить справку о нужной нам звезде.

Естественно, что вычислительная машина может, во-первых, дольше работать не сбиваясь, а во-вторых, она составляет различные схемы во много раз быстрее, чем человек. Поэтому в каждой категории соответствующие числа для машины будут больше, чем для человека.

Числа	Человек	Машина
Малые	3	10
Средние	1000	10^{10}
Большие	10^{100}	$10^{10^{10}}$

Что поучительного в этой таблице? Из нее видно, что хотя соответственные числа для машины гораздо больше, чем для человека, но остаются близкого порядка с ними. Между же числами разных категорий существует непроходимая грань: числа, средние для человека, не становятся малыми для машины, так же как числа, большие для человека, не становятся средними для машины. 10^3 несравненно больше, чем 10, а 10^{100} безнадежно больше, чем 10^{10}. Заметим, что объем памяти живого существа и даже машины характеризуется средними числами, а многие проблемы, решающиеся путем так называемого простого перебора,— большими.

Здесь мы сразу выходим за пределы возможностей сравнения путем простого перебора. Проблемы, которые не могут быть решены без большого перебора, останутся за пределами возможностей машины на сколь угодно высокой ступени развития техники и культуры.

К этому выводу мы пришли, не обращаясь к понятию бесконечности. Оно нам не понадобилось и вряд ли понадобится при решении реальных проблем, возникающих на пути кибернетического анализа жизни.

Зато важным становится другой вопрос: существуют ли проблемы, которые ставятся и решаются без необходимости большого перебора? Такие проблемы должны прежде всего интересовать кибернетиков, ибо они реально разрешимы.

Принципиальная возможность создания полноценных живых существ, построенных полностью на дискретных (цифровых) механизмах переработки информации и управления, не противоречит принципам материалистической диалектики. Противоположное мнение может возникнуть лишь потому, что некоторые привыкли видеть диалектику лишь там, где появляется бесконечность. При анализе явлений жизни существенна, однако, не диалектика бесконечного, а диалектика большого числа.

6.4. Осторожно, увлекаемся!

В настоящее время для кибернетики, пожалуй, больше, чем для всякой другой науки, важно, что о ней пишут. Я не принадлежу к большим энтузиастам всей той литературы по кибернетике, которая сейчас так широко издается, и вижу в ней большое количество, с одной стороны, преувеличений, а с другой — упрощенчества.

Нельзя, конечно, сказать, что в этой литературе утверждается то, что на самом деле недостижимо, но в ней часто встречаются восторженные статьи, сами заглавия которых уже кричат об успехах в моделировании различных сложных видов человеческой деятельности, которые в действительности моделируются пока совсем плохо. Например, в американской кибернетической литературе и у нас, порой даже в совсем серьезных научных журналах, можно встретить работы о так называемом машинном сочинении музыки (это не относится к работам Р. Х. Зарипова). Под этим обычно подразумевается следующее: в память машины «закладывается» нотная запись большого числа (скажем, 70) ковбойских песен или, например, церковных гимнов; затем машина по первым четырем нотам одной из этих песен отыскивает все те песни, где эти четыре ноты встречаются в том же порядке и, случайным образом выбрав одну из них, берет из нее следующую, пятую ноту. Теперь перед машиной вновь четыре ноты (2, 3, 4 и 5), и она снова таким же способом осуществляет поиски и выбор. Так машина как бы на ощупь «создает» некую новую мелодию. При этом утверждается, что если в памяти машины были ковбойские песни, то и в ее тво-

рении слышится нечто «ковбойское», а если это были церковные гимны,— то нечто «божественное». Спрашивается, а что произойдет, если машина будет производить поиск не по четырем, а по семи идущим подряд нотам? Поскольку в действительности двух произведений, содержащих семь одинаковых нот подряд, почти не встретишь, то, очевидно, «запев» семь нот из какой-нибудь песни, машина вынуждена будет пропеть ее до конца. Если же, наоборот, машине для собственного творчества достаточно знать только две ноты (а произведений с двумя одинаковыми нотами сколько угодно), то здесь ей представился бы такой широкий выбор, что вместо мелодии из машины послышалась бы какофония звуков.

Вся эта несложная схема преподносится в литературе как «машинное сочинение музыки», причем всерьез заявляется, что с увеличением числа нот, нужных «для затравки», машина начинает создавать музыку более серьезного, классического характера, а с уменьшением этого числа переходит на современную, джазовую.

На сегодня мы еще очень далеки от осуществления анализа и описания высших форм человеческой деятельности, мы даже еще не научились в объективных терминах давать определения многих встречающихся здесь категорий и понятий, а не только моделировать такие сложные виды этой деятельности, к каким относится создание музыки. Если мы не умеем понять, чем отличаются живые существа, нуждающиеся в музыке, от существ, в ней не нуждающихся, то, приступая сразу к машинному сочинению музыки, мы окажемся в состоянии моделировать лишь чисто внешние факторы.

«Машинное сочинение музыки» — это только пример упрощенного подхода к проблемам кибернетики. Другой распространенный недостаток заключается в том, что сторонники кибернетики настолько увлеклись возможностями кибернетического подхода к решению любых самых сложных задач, что позволяют себе пренебрегать опытом, накопленным другими науками за долгие века их существования. Часто забывают о том, что анализ высших форм человеческой деятельности был начат давно и продвинулся довольно далеко. И хотя он и ведется в других, не кибернетических терминах, но по существу объективен, и его необходимо изучать и использовать. А то, что сумели сделать кибернетики «голыми руками» и вокруг чего поднимают такую шумиху, зачастую не выходит за рамки исследования самых примитивных явлений.

Однажды на вечере в московском Доме литераторов один из участников вел с трибуны разговор о том, что наше время должно было создать и уже создало новую медицину. Эта новая медицина есть достояние и предмет изучения не медиков, а специалистов по теории автоматического регулирования! Самое главное в медицине, по мнению выступавшего,— это циклические процессы, происходящие в человеческом организме. А такие процессы как раз и описываются дифференциальными уравнениями, изучаемыми в теории автоматического регулирования. Так что изучать медицину в медицинских институтах теперь вроде как устарело — ее надо передать в ведение втузов и математических факультетов. Может быть, и верно, что специалисты по теории автоматического регулирования могут сказать свое слово в разрешении отдельных проблем, стоящих перед медициной. Но если они захотят принять участие в этой работе, то прежде всего им потребуется колоссальная доквалификация, ибо опыт, накопленный медициной, этой старейшей из наук, огромен, и для того чтобы сделать в ней что-то серьезное, надо сначала овладеть им.

6.5. Почему только крайности?

Вообще анализ высшей нервной деятельности в кибернетике сосредоточен пока на двух крайних полюсах. С одной стороны, кибернетики активно занимаются изучением условий рефлексов, т. е. простейшего типа высшей нервной деятельности. Всем, вероятно, известно, что такое условный рефлекс. Если два каких-нибудь раздражителя многократно осуществляются одновременно друг с другом (например, одновременно с подачей пищи включается звонок), то через некоторое время уже один из этих раздражителей (звонок) вызывает ответную реакцию организма (слюноотделение) на другой раздражитель (подачу пищи). Это сцепление является временным и, если его не подкреплять, постепенно исчезает. Значительная часть кибернетических проблем, которые известны сейчас под названием математической теории обучения, охватывает такие очень простые схемы, которые не исчерпывают и малой доли всей сложной высшей нервной деятельности человека и в анализе самой условнорефлекторной деятельности представляют собой лишь начальную ее ступень.

Другой полюс — это теория формально-логических решений. Эта сторона высшей нервной деятельности че-

ловека хорошо поддается изучению математическими методами, и с созданием вычислительной техники и вычислительной математики исследования такого рода быстро двинулись вперед. И здесь кибернетики во многом преуспели.

А все огромное пространство между этими двумя полюсами — самыми примитивными и самыми сложными психическими актами (даже такие простые формы синтетической деятельности, как, скажем, механизм точно рассчитанного геометрического движения, о котором говорилось выше, пока плохо поддаются кибернетическому анализу) — изучается крайне мало, чтобы не сказать вовсе не изучается.

6.6. Кибернетика и язык

Особое положение сейчас занимает математическая лингвистика. Эта наука только еще создается и развивается по мере накопления кибернетических проблем, связанных с языком. Она имеет дело с анализом высших форм человеческой деятельности скорее интуитивного, нежели формально-логического характера, ибо эта деятельность плохо поддается точному описанию. Каждый знает, что такое грамотно построенная фраза, правильное согласование слов и т. п., но никто пока не может адекватно передать это знание машине. Точный, логически и грамматически безукоризненный машинный перевод сейчас возможен был бы, пожалуй, только с латинского и на латинский язык, грамматические правила которого достаточно полны и однозначны. Грамматические же правила новых, живых языков, по-видимому, еще недостаточны для осуществления с их помощью машинного перевода. Необходимым здесь анализом занимаются уже давно, и в настоящее время машинный перевод стал предметом широко и серьезно поставленной деятельности. Можно, пожалуй, сказать, что именно на нем сосредоточено сейчас основное внимание математических лингвистов. Однако в теоретических работах по математической лингвистике мало учитывается одно обстоятельство, а именно тот факт, что язык возник значительно раньше формально-логического мышления. Быть может, для теоретической науки одно из самых интересных исследований (в котором могут естественно сочетаться идеи кибернетики, новый математический аппарат и современная логика) есть исследование процесса образования слов как второй сигнальной системы. Первоначально, при пол-

ном еще отсутствии понятий, слова выступают в роли сигналов, вызывающих определенную реализацию. Возникновение логики обычно относят к сравнительно недавнему времени: по-видимому, только в Древней Греции было ясно понято и сформулировано, что слова не просто являются обозначениями неких непосредственных представлений и образов, но что от слова можно отделить понятие. До настоящего, формально-логического, мышления мысли возникали не формализованные в понятии, а как комбинирование слов, которые ведут за собой другие слова, как попытки непосредственно зафиксировать проходящий перед нашим сознанием поток образов и т. д. Проследить этот механизм выкристаллизовывания слов как сигналов, несущих в себе комплекс образов, и создания на этой базе ранней логики — крайне благодарная область исследования, для математика в частности, что, впрочем, неоднократно отмечалось в кибернетической литературе.

Интересным может показаться и следующий вопрос: как формулируется логическая мысль у человека? Попробуем проследить этапы этого процесса на примере работы математика над какой-нибудь проблемой. Сначала, по-видимому, возникает желание исследовать тот или иной вопрос, затем какое-то приблизительное, неведомо откуда возникшее представление о том, что мы надеемся получить в результате наших поисков и какими путями нам, может быть, удастся этого достичь, и уже на следующем этапе мы пускаем в ход свой внутренний «арифмометр» формально-логического рассуждения. Таков, по-видимому, путь формирования логической мысли, такова схема процесса творчества. Может, вероятно, представиться интересным не только исследовать первую, интуитивную стадию этого процесса, но и задаться целью создать машину, способную помочь человеку в процессе творчества на стадии оформления мысли (математику, например, на стадии оформления вычислений), поручить, скажем, такой машине понимать и фиксировать в полном виде какие-то неясные, вспомогательные наброски чертежей и формул, которые всякий математик рисует на бумаге в процессе творческих поисков, или, например, воссоздавать по наброскам изображения фигур в многомерных пространствах и т. п. Иными словами, интересно подумать о создании машин, которые, не подменяя человека, уже сейчас помогали бы ему в сложных процессах творчества. Пока еще трудно даже представить себе,

каким образом и на каких путях такую машину можно было бы осуществить. Но хотя пока еще эта задача и далека от своего разрешения, разговор обо всех таких вопросах уже возник в кибернетической литературе, что, по-видимому, можно только приветствовать.

Как можно уже увидеть из нескольких приведенных здесь примеров, различных проблем, связанных с пониманием объективного устройства самых тонких разделов высшей нервной деятельности человека, очень много. И все они заслуживают должного внимания кибернетиков.

6.7. Материализм — это прекрасно!

В заключение следует остановиться на вопросах, касающихся, если можно так сказать, этической стороны идей кибернетики. Встречающиеся часто отрицание и неприятие этих идей проистекают из нежелания признать, что человек является действительно сложной материальной системой, но системой конечной сложности и весьма ограниченного совершенства и поэтому доступной имитации. Это обстоятельство многим кажется унизительным и страшным. Даже воспринимая эту идею, люди не хотят мириться с ней: такая картина всеобъемлющего проникновения в тайны человека, вплоть до возможности, так сказать, «закодировать» его и «передать по телеграфу» в другое место, кажется им отталкивающей и пугающей. Встречаются опасения и другого рода: а допускает ли вообще наше внутреннее устройство исчерпывающее объективное описание? Предлагалось, например, поставить перед кибернетикой задачу научиться отличать по объективным признакам существа, нуждающиеся в сюжетной музыке, от существ, в ней не нуждающихся. А вдруг поанализируем, поанализируем — и окажется, что и в самом деле нет никакого разумного основания выделять такую музыку как благородную по сравнению с другими созвучиями.

Мне представляется важным понимание того, что ничего унизительного и страшного нет в этом стремлении постичь себя до конца. Такие настроения могут возникать лишь из полузнания: реальное понимание всей грандиозности наших возможностей, ощущение присутствия вековой человеческой культуры, которая придет нам на помощь, должно производить огромное впечатление, должно вызывать восхищение! Все наше устройство

в самих себе понятно, но понятно и то, что это устройство содержит в себе колоссальные, ничем не ограниченные возможности.

На самом деле нужно стремиться этот глупый и бессмысленный страх перед имитирующими нас автоматами заменить огромным удовлетворением тем фактом, что такие сложные и прекрасные вещи могут быть созданы человеком, который еще совсем недавно находил простую арифметику чем-то непонятным и возвышенным.

7. ИЗБРАННЫЕ ПРЕДИСЛОВИЯ

7.1. Предисловие к книге Г. Штейнгауза «Математический калейдоскоп»

Доказательства математических теорем следуют строгим законам логики. Подобно этому школьник, решив задачу, обязан отчетливо изложить решение и обосновать законность каждого шага решения. Но в случае сколько-нибудь сложной задачи сначала надо придумать решение и лишь потом его обосновать. Подобно этому интересные новые теоремы математики сначала придумывают «по догадке», или, как говорят более учено, по интуиции.

Математическая интуиция часто руководствуется представлениями о красоте. Решение хорошо поставленной, естественной задачи обычно оказывается красивым. Конечно, не каждая красиво выглядящая гипотеза оправдывается. Но искать подлинное решение проблемы часто бывает разумным среди предположений, выделяющихся своей красотой.

Известный польский математик Гуго Штейнгауз в своей книге «Математический калейдоскоп» стремится увлечь читателя математикой именно с этой стороны: красотой математических фактов и возможностью их усмотреть интуитивно еще до логического обоснования. Доказательства тоже бывают красивы своей неожиданной простотой. Они, конечно, тоже имеются в книге Штейнгауза, но многие факты сообщаются и без доказательств, чтобы увлечь читателя своей красотой, в то время как само доказательство может оказаться и недоступным читателям из-за недостатка у них знаний.

«Математический калейдоскоп» можно читать разными способами. Нет ничего зазорного в том, чтобы пере-

листывать его, останавливаясь подробнее на картинках, поражающих своей красотой, либо обращая внимание на простоту формулировок ответов в тех случаях, когда, казалось бы, заданные вопросы простых ответов не обещают. Но, конечно, читатель получит больше пользы и больше удовольствия, если разберется в доказательствах там, где они приведены, и попытается их найти там, где они не даны автором.

[. . .] Я надеюсь, что новое издание книги Штейнгауза завоюет ей много друзей среди читателей «Библиотечки «Квант».

7.2. Предисловие к книге Н. Б. Васильева, А. А. Егорова «Сборник подготовительных задач к Всероссийской олимпиаде юных математиков»

Наша страна нуждается в большом числе хорошо подготовленных и талантливых математиков. Очень важно, чтобы профессию математика выбирали те представители нашей молодежи, которые могут работать в этой области наиболее продуктивно. Одним из путей привлечения одаренной молодежи к математике являются математические олимпиады. Участие в школьных математических кружках и олимпиадах может помочь каждому оценить свои собственные способности, серьезность и прочность своих увлечений математикой.

В сборнике, подготовленном Н. Васильевым и А. Егоровым, собраны задачи, не требующие для своего решения каких-либо особых знаний, выходящих за пределы программы средней школы, но требующие известной самостоятельности мысли и сообразительности.

[. . .] Желая читателям сборника всяческих успехов в решении задач и побед на городских, областных и Всероссийских олимпиадах, я хочу в то же время заметить, что пути к серьезной работе в области математической науки разнообразны. Одним легче дается решение замысловатых задач, другие вначале не выделяются на этом поприще, но, двигаясь медленно, овладевают глубоко и серьезно теорией и несколько позднее научаются работать самостоятельно. В конечном счете при выборе математики как предмета основных интересов и работы на долгое будущее каждый должен руководствоваться своей собственной самооценкой, а не числом премий и похвальных отзывов на олимпиадах.

7.3. Предисловие к книге Г. А. Гальперина, А. К. Толпыго «Московские математические олимпиады»*)

Нашей стране необходимо иметь много математиков-исследователей, способных делать открытия в самой математике и применять ее нестандартным образом, требующим большой изобретательности. Обычно серьезных успехов достигают те научные работники, которые начали тренироваться в такого рода деятельности еще в школьные годы. В возрасте 17—19 лет многие из них уже начинают делать настоящие открытия. Откладывая вовлечение молодых людей в напряженную научную работу, мы безвозвратно теряем многих из тех, кто мог бы сделаться творчески активным ученым.

Обращаясь к самим школьникам, всерьез собравшимся стать настоящими математиками, скажу следующее. Как и в спорте, тренировка юного математика требует затраты большого количества времени. Будет очень хорошо, если вы возьметесь самостоятельно просматривать предлагаемый сборник задач, выберете из их числа какую-нибудь задачу, которая покажется вам наиболее интересной по формулировке, и приметесь, не заглядывая в решения, размышлять над ней, не боясь потратить на нее многие, многие часы. Напомню по этому поводу высказывание одного из самых замечательных советских математиков — Бориса Николаевича Делоне, по мнению которого большое научное открытие отличается от хорошей олимпиадной задачи только тем, что для решения олимпиадной задачи требуется 5 часов, а получение крупного научного результата требует затраты 5000 часов. Борис Николаевич любил преувеличенные формулировки, не понимайте его «5000 часов» слишком буквально. Но типичным для математика, который атакует трудную проблему, является способность напряженного размышления над ней целыми днями. Если задача упорно не выходит, то разумно взяться за другую. Но хорошо также после некоторого перерыва вернуться к первоначальной. Зрелым математикам иногда бывает полезно на некоторое время отложить занятие какой-либо неподдающейся проблемой. Нередко после некоторого перерыва решение неожиданно выплывает из подсознания.

---

*) А. Н. Колмогоров является редактором этой книги.— *Примеч. сост.*

Своим успехам на олимпиаде естественно радоваться и даже гордиться ими. Неудачи же на олимпиаде не должны чрезмерно огорчать и приводить к разочарованию в своих способностях к математике. Для успеха на олимпиаде необходимы некоторые специальные типы одаренности, которые вовсе не обязательны для успешной исследовательской работы. Уже само наличие назначенного очень ограниченного срока для решения задач многих делает совершенно беспомощными. Но существуют и такие математические проблемы, которые могут быть решены лишь в результате очень длительного и спокойного размышления и формирования новых понятий. Много такого рода проблем было решено замечательным советским топологом П. С. Александровым. Не случайно Павел Сергеевич Александров неоднократно говорил, что если бы во времена его юности были математические олимпиады, то, возможно, он вообще не сделался бы математиком: его главные достижения в математике явились не плодом быстро работающей *изобретательности*, а итогом длительного и углубленного *созерцания*.

Я надеюсь, что наш сборник окажется неоценимым пособием для всех руководителей школьных кружков и местных олимпиад. Для них я хочу высказать два замечания.

Вначале Московские математические олимпиады были рассчитаны на учащихся 9—10 классов. Начиная же с 1940 года к участию в олимпиадах приглашались также семиклассники и восьмиклассники. Такой выбор начального возраста представляется мне обоснованным. Это — тот возраст, когда склонности и способности к математике уже начинают проявляться достаточно явственно. Можно, конечно, устраивать олимпиады и для младшеклассников, но при этом следует иметь в виду, что из числа мальчиков и девочек, выделившихся в 5—6 классах в состязании по решению задач, большинство в старших классах эти свои особые способности, а часто и сам интерес к математике потеряют.

При организации олимпиад для того или иного контингента участников чрезвычайно существенно, чтобы уровень трудности задач был надлежащим образом заранее правильно оценен. Следует планировать его так, чтобы наиболее сильные участники могли решить бóльшую часть задач, а с другой стороны, чтобы не было чрезмерного преобладания участников, не решивших ни одной задачи. Некоторые сведения о фактически обнаружившейся труд-

ности встретившихся задач можно найти в отчетах об олимпиадах, печатающихся в журналах «Математика в школе» и «Квант». К сожалению, в Московских математических олимпиадах уровень трудности не всегда выбирался правильно. Но содержание задач было обычно на очень высоком уровне.

В предисловии составителей подробно рассказывается об огромном опыте Московских математических олимпиад, о том, как процесс создания олимпиадных задач шел в неразрывной связи с работой математических кружков при Московском университете. Коллектив руководителей университетских математических кружков проделал огромную, уникальную работу, итоги которой сейчас перед вами. [...]

7.4. Предисловие к статье В. Г. Болтянского, Н. Х. Розова «Ленинская теория познания и математические понятия»

Уже в средних классах школы становится ясным своеобразие математики по сравнению, например, с физикой. Все физические законы справедливы с некоторой степенью точности и часто при прогрессе измерительной техники заменяются новыми, по отношению к которым первоначальные становятся лишь первым приближением.

Бессмысленно спрашивать себя, рациональна или иррациональна длина стержня. Для узко понятой практики иррациональные числа не нужны. В математике же теорема о том, что диагональ квадрата несоизмерима со стороной, считается очень важной. Открытие этого факта в Древней Греции считается одним из поворотных пунктов всего развития математики.

Публикуемая статья В. Г. Болтянского и Н. Х. Розова содержит попытку популярно изложить своеобразие математики с точки зрения философии диалектического материализма. Быть может, некоторые из вас осилят посвященные этим вопросам разделы моей статьи «Математика» в 26-м томе второго издания БСЭ.

В. И. Ленин дал подробный анализ основных философских вопросов физики. Специально философскими вопросами математики Ленин не занимался. Но его общие высказывания по вопросам теории познания служат руководством и для математиков.

РАЗДЕЛ II

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

1. ЧТО ТАКОЕ ФУНКЦИЯ?

В этой статье объясняется современное общее понимание слова «функция». Статья не для легкого чтения: она требует от читателя внимания к каждому слову, хотя и не предполагает каких-либо специальных знаний, выходящих за рамки средней школы. Имеется также в виду, что читатели умеют обращаться со словами «множество» и «элемент множества».

1.1. Введение

На вопрос «Что такое функция?» школьники часто отвечают: «Функцию можно задать таблицей, графиком или формулой». Ясно, что это не определение. Но школьники, которые уклоняются от формулировки явного определения и сразу переходят к описанию того, как задают функции, и не совсем не правы. Математика не может начинаться с определений. Формулируя определение некоторого понятия, мы неизбежно в самóм этом определении употребляем какие-либо другие понятия. Пока мы не понимаем смысла каких-либо понятий, мы не сдвинемся с места и не сможем сформулировать ни одного определения. Поэтому изложение любой математической теории начинается с того, что какие-либо основные понятия принимаются без определения. Пользуясь ими, уже возможно бывает формулировать определение дальнейших производных понятий.

Каким же способом люди объясняют друг другу свое понимание смысла основных понятий? Для этого не существует другого способа, как разъяснение на примерах и при помощи подробного описания характерных свойств определяемых вещей. Эти описания могут быть в деталях не вполне ясными и сначала не исчерпыва-

ющими. Но постепенно из них смысл понятия вырисовывается с достаточной ясностью. Так мы подойдем к понятию *функции*, считая его одним из основных математических понятий, не подлежащих формальному определению.

Правда, далее будет сказано, что функция есть не что иное, как *отображение* одного множества на другое (*области определения* функции на *множество ее значений*). Но здесь слово *отображение* явится просто синонимом слова *функция*. Это — два названия для одного и того же понятия. Пояснение одного слова другим равнозначащим не может заменить определения выражаемого им понятия.

Пример 1. Будем считать, что буквы x и y обозначают действительные числа. Знак $\sqrt{}$ будем считать знаком извлечения арифметического квадратного корня. Равенство

$$y = \sqrt{1 - x^2} \tag{1}$$

обозначает, что выполнены условия

$$x^2 \leqslant 1, \quad y \geqslant 0, \quad x^2 + y^2 = 1. \tag{2}$$

Точки, координаты которых удовлетворяют этим условиям, образуют полуокружность, изображенную на рис. 1.

Рис. 1 делает наглядными следующие факты, которые вы можете доказать и чисто алгебраическим путем:

1) формула (1) позволяет для любого x, удовлетворяющего условиям

$$-1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{3}$$

вычислить соответствующее ему y, которое удовлетворяет неравенствам

$$0 \leqslant y \leqslant 1; \tag{4}$$

2) каждому y, удовлетворяющему неравенствам (4), соответствует хотя бы одно такое x, которому по формуле (1) соответствует это заданное y.

Можно сказать, что формула (1) задает *отображение* множества чисел x, удовлетворяющих неравенствам (3), на множество чисел, подчиненных неравенствам (4). Математики часто (особенно в последнее время) для обозначения отображений употребляют стрелку. Занимающее нас отображение можно записать при помощи стрелки так:

$$x \to \sqrt{1 - x^2}. \tag{5}$$

Например:

$$-1 \to \sqrt{1-(-1)^2}=0, \qquad -\frac{4}{5} \to \sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}, \tag{6}$$

$$\frac{3}{5} \to \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}, \qquad 0 \to \sqrt{1-0^2}=1.$$

Заметьте: *отображение полностью определено, если* а) *задано множество E, которое отображается*; б) *для каждого элемента x этого множества E задан элемент y, на который элемент x отображается.*

Множество всех значений y обозначим буквой M. В примере 1 E — множество чисел, удовлетворяющих условию (3), а M — множество чисел, удовлетворяющих условию (4) *).

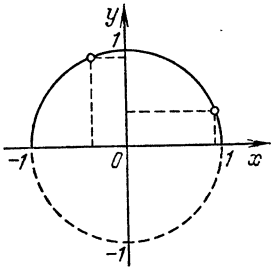


Рис. 1

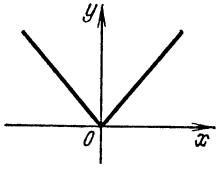


Рис. 2

Пример 2. Правила

1) $x \to \sqrt{x^2}$,

2) $x \to \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$

определяют одно и то же отображение

$$x \to |x| \tag{7}$$

действительных чисел x на их модули (абсолютные величины) (рис. 2).

---

*) Множество можно обозначить любой буквой. Здесь взяты буквы E (от французского слова ensemble — множество) и M (от немецкого die Menge — множество; случайно и русское слово «множество» начинается с этой же буквы). Но это не обязательно: уже в следующем примере мы обозначим множество действительных чисел, как это принято, буквой $\mathbb{R}$ (от французского reél — действительный, реальный).

Отображение (7) отображает множество всех действительных чисел

$$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$$

на множество

$$\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$$

неотрицательных действительных чисел.

Вместо слова *отображение* можно говорить *функция* и записать отображение (5) так:

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \tag{8}$$

а отображение (7) так:

$$f(x) = |x|. \tag{9}$$

Частные значения функции (8), перечисленные в формулах (6), будут тогда записаны в таком виде:

$$f(-1) = 0, \quad f\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5}, \quad f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}, \quad f(0) = 1.$$

Областью определения функции (9) является множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$. Множеством ее значений является множество $\mathbb{R}_+$ неотрицательных действительных чисел.

Пример 3. Петя, Коля, Саша и Володя живут в комнате общежития. На февраль они установили такой график дежурств:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13 ... 28
Петя	×				×				×				...
Коля		×				×				×			...
Саша			×				×				×		...
Володя				×				×				×	... ×

Сразу бросается в глаза сходство этой таблицы с привычными вам из школьного курса алгебры графиками функций. Имеет ли эта аналогия точный логический смысл? Установили ли здесь мальчики *отображение* одного множества на другое, т. е. определили ли некоторую *функцию*? И не начертили ли они *график* этой функции? (Обратите внимание на житейское выражение «установили график дежурств!»).

1.2. Общее понятие функции

Нетрудно видеть, что в примере 3 на каждый из 28 дней февраля назначен определенный дежурный. Иначе говоря, множество дней февраля отображено на множество мальчиков, распределивших между собой дежурства. Можно условиться, что буква x обозначает любой день февраля, а $y = f(x)$ — дежурного в день x. Нет никаких оснований отказывать отображению

день $x \rightarrow =$ *y дежурный на день x*

в праве называться *функцией*; можно записать это отображение так:

$$y = f(x).$$

Любое отображение f множества E на множество M мы будем называть функцией с областью определения E и множеством значений M.

Не забудьте, что, говоря об отображении f множества E на множество M, мы имеем в виду, что $y = f(x)$ определено для любого x из E и только для x из этого множества, а значение y функции f непременно принадлежит множеству M, и каждое y из этого множества M является значением функции f хотя бы при одном значении аргумента x.

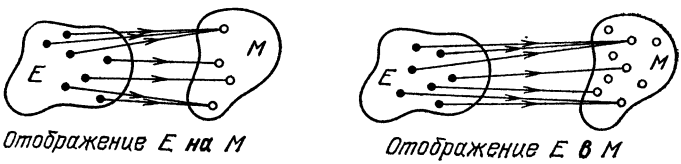


Рис. 3

Если известно только, что значения функции f непременно принадлежат множеству M, но не утверждается, что любой элемент этого множества является значением функции f, то говорят, что функция отображает свою область определения E в множество M или что отображение f есть отображение множества E в множество M (рис. 3).

Таким образом, надо строго различать смысл выражений

«*отображение* **на** *множество* M»,
«*отображение* **в** *множество* M» *).

Например, про отображение

$$x \to |x|$$

можно сказать, что оно является отображением $\mathbb{R}$ **в** $\mathbb{R}$, но нельзя сказать, что это отображение $\mathbb{R}$ **на** $\mathbb{R}$.

С чисто логической точки зрения наиболее простым случаем является случай, когда область определения функции конечна. Ясно, что функция, область определения которой состоит из n элементов, не может принимать более n различных значений. Таким образом, функции, определенные на конечных множествах, осуществляют отображения конечных множеств на конечные множества. Такие отображения являются одним из предметов изучения важной части математики — *комбинаторики* (см. задачи 8, 11, 18, 19).

Пример 4. Рассмотрим функции, область определения которых есть множество $M = \{A, B\}$ из двух букв A и B и значения которых принадлежат тому же множеству, т. е. отображения множества M **в** *себя*.

Таких функций существует всего четыре. Зададим их табличным способом:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
A	A	B	A	B
B	A	B	B	A

Функции f_1 и f_2 являются *константами*, т. е. постоянными: множество значений каждой из этих функций состоит из одного-единственного элемента.

Функции f_3 и f_4 отображают множество M **на** себя. Функция f_3 может быть задана формулой

$$f_3(x) = x.$$

Это — *тождественное* отображение: каждый элемент множества E отображается в самого себя.

Чтобы закончить выяснение смысла самого понятия «функция», остается обратить внимание на то, что выбор

*) Заметьте еще, что каждое отображение «на» можно назвать и отображением «в», но не наоборот.

букв для обозначения «независимого переменного», т. е. произвольного элемента области определения, и «зависимого переменного», т. е. произвольного элемента множества значений, совершенно несуществен. Записи

$$x \xrightarrow{f} \sqrt{x}, \quad \xi \xrightarrow{f} \sqrt{\xi}, \quad y \xrightarrow{f} \sqrt{y},$$

$$f(x) = y = \sqrt{x}, \; f(\xi) = \eta = \sqrt{\xi}, \; f(y) = x = \sqrt{y}$$

определяют одну и ту же функцию f, которая отображает неотрицательное число в арифметический квадратный корень из него. Пользуясь любой из этих записей, мы получим

$$f(1) = 1, \; f(4) = 2, \; f(9) = 3 \text{ и т. д.}$$

1.3. Обратимая функция

Функция

$$y = f(x)$$

называется *обратимой* *), если каждое свое значение она принимает один-единственный раз. Таковы функции $f_3(x)$ и $f_4(x)$ из примера 4. Функции же $f_1(x)$ и $f_2(x)$ из примера 4 и функции из примеров 1, 2 и 3 необратимы.

Чтобы доказать, что какая-либо функция необратима, достаточно указать какие-либо два значения аргумента $x_1 \neq x_2$, для которых

$$f(x_1) = f(x_2).$$

В примере 3 достаточно заметить, что Петя дежурит как 1-го, так и 5-го февраля. Поэтому функция примера 3 необратима.

Пример 5. Функция

$$x \xrightarrow{f} y = -\sqrt{x}$$

обратима. Она определена на множестве $\mathbb{R}_+$ неотрицательных чисел. Множеством ее значений является множество

$$\mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$$

всех неположительных чисел. Задав любое y из множества $\mathbb{R}_-$, можно найти соответствующее x по формуле $x = y^2$.

*) Происхождение названия выяснится дальше: функция обратима, если для нее существует обратная ей функция.

Функция g

$$y \xrightarrow{g} x = y^2 \text{ при } y \leqslant 0$$

есть функция, о б р а т н а я к функции f. Она отображает множество $\mathbb{R}_-$ на множество $\mathbb{R}_+$. Как уже говорилось, выбор букв для обозначения независимого и зависимого переменного несуществен.

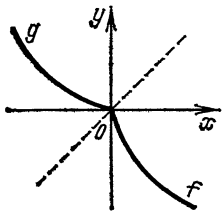


Рис. 4

Функции f и g можно записать в виде

$$f(x) = -\sqrt{x} \text{ при } x \geqslant 0,$$
$$g(x) = x^2 \text{ при } x \leqslant 0.$$

На рис. 4 изображены графики взаимно обратных функций f и g.

П р и м е р 6. Функция f, заданная таблицей

x	А	Б	В	Г	Д
$y = f(x)$	3	1	2	5	4

,

определена на множестве первых пяти букв русского алфавита, а множество ее значений есть множество первых пяти натуральных чисел. Обратная функция g задается таблицей

x	1	2	3	4	5
$y = g(x)$	Б	В	А	Д	Г

На рис. 5 даны графики этих функций.

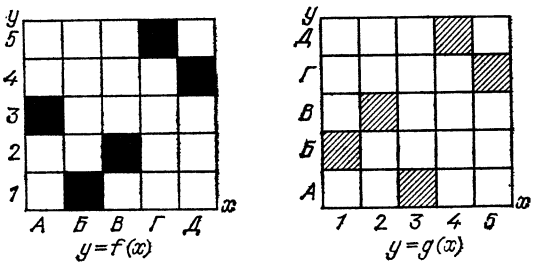


Рис. 5

Дадим т о ч н ы е о п р е д е л е н и я. Пусть f — отображение множества E на множество M. Если для любого элемента y из множества M существует о д и н-

единственный элемент

$$x = g(y)$$

множества E, для которого

$$f(x) = y,$$

то отображение f является *обратимым*, а

$$y \xrightarrow{g} x$$

называется отображением, *обратным* к отображению f *).

Таким образом, обратимость отображения f означает, что у него есть обратное отображение g. Отображение, обратное к f, принято обозначать знаком f^{-1}. Например, если

$$f(x) = x^3,$$

то

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}.$$

Так как слово «функция» есть просто синоним слова «отображение», то тем самым мы определили и смысл выражения «обратная функция». Попробуйте сами повторить сказанное выше, употребляя вместо слова «отображение» слово «функция».

Ясно, что областью определения обратной функции f^{-1} является множество значений функции f, а множество значений f^{-1} есть область определения функции f.

Функцией, обратной к обратной функции f^{-1}, является исходная функция f:

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

Таким образом, функции f и f^{-1} всегда *взаимно обратны*.

Пример 7. Существуют функции, которые сами себе обратны. Таковы функции

а) $f(x) = x$, б) $f(x) = \frac{1}{x}$, в) $f(x) = \frac{x}{x-1}$.

Проверьте! Графики этих функций даны на рисунке 6. Заметьте, что все эти графики симметричны относительно биссектрисы первого и третьего квадрантов, т. е. прямой $y = x$.

Изобразим на рис. 7 схематически соотношения между разными видами отображения множества A на множество B и множества A в множество B.

*) Такие отображения называются еще *взаимно однозначными* отображениями E на M.

Напомним еще раз, что самым общим понятием является понятие отображения A **в** B. Если при таком отображении образ A совпадает с B, говорят об отображении A **на** B.

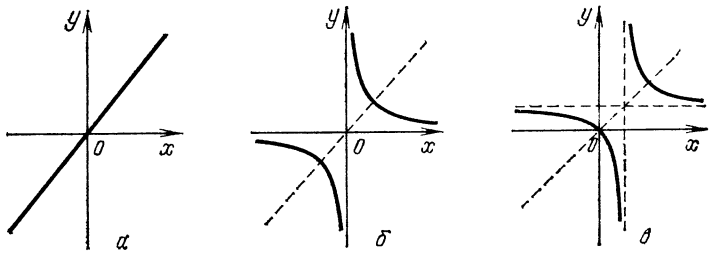


Рис. 6

Обратимые отображения называют еще *взаимно однозначными* отображениями. Этот термин вам часто встретится в книгах. Но не принято говорить о «взаимно однозначных функциях». Так как мы считаем слова «функция»

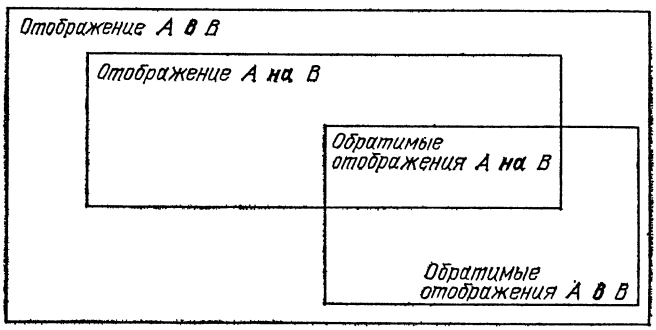


Рис. 7

и «отображение» синонимами, то вместо слов «взаимно однозначная функция» мы предпочли применять слова «обратимая функция» или, что то же самое, «обратимое отображение».

В последнее время в нашей литературе получила еще распространение французская терминология:

1) отображения A **на** B называют «сюръективными» или «сюръекциями»;

2) обратимые отображения A **в** B называют «инъективными» или «инъекциями»;

3) обратимые отображения A на B называют «биективными» или «биекциями».

Обратите внимание на то, что при внимательном отношении к употреблению предлогов «в» и «на» такое обилие терминов излишне.

Задачи.

Нуликом отмечены совсем легкие вопросы, отвечая на которые вы можете проверить, поняли ли вы написанное в статье. Более трудные задачи отмечены *звездочкой*. Не обязательно их решать все.

1.1. Введение.

1°. Найдите области определения и множества значений следующих функций:

а) $y = f(x) = \frac{1}{x^2}$, б) $y = f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

2. *Целой частью* числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x. Целая часть x обозначается $[x]$. Например,

$$[0] = 0, \quad [7{,}5] = [7] = 7, \quad [-0{,}3] = -1, \quad [-\pi] = -4.$$

Разность $x - [x]$ называется *дробной частью* числа x и обозначается $\{x\}$. Постройте графики следующих функций и найдите их области определения и множества значений:

а) $f_1(x) = [x]$, б) $f_2(x) = \{x\}$, в) $f_3(x) = \{x\} - \frac{1}{2}$,

г) $f_4(x) = \left|\{x\} - \frac{1}{2}\right|$, д*) $f_5(x) = \left[\frac{1}{x}\right]$,

е*) $f_6(x) = \frac{1}{[x]}$, ж*) $f_7(x) = \left\{\frac{1}{x}\right\}$, з*) $f_8(x) = \frac{1}{\{x\}}$.

3*. Для любого натурального числа n определим $s(n)$ как сумму делителей числа n (не считая самого n). Например,

$$s(1) = 0, \quad s(2) = 1, \quad s(6) = 6, \quad s(12) = 16, \quad s(28) = 28.$$

Доказать, что $s(n)$ не принимает значений 2 и 5.

1.2. Функция.

4°. Два человека (A и B) могут поселиться в двух комнатах четырьмя разными способами, показанными на рис. 8.

Сколькими способами можно поселить: а) двух человек в трех комнатах, б) трех человек в двух комнатах, в) трех человек в двух комнатах так, чтобы ни одна из комнат не осталась незанятой?

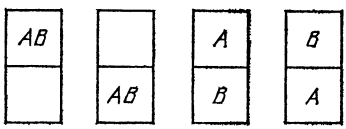


Рис. 8

5°. Множество M состоит из трех элементов, а множество N — из двух элементов. Сколько существует: а) отображений M в N, б) отображений M на N, в) отображений N в M, г) отображений N на M?

6. Сколько существует семизначных телефонных номеров? Какое число из них образовано только цифрами 0, 1, 2 и 3?

7. Докажите, что существует более миллиона функций, принимающих только два значения 0 и 1 и определенных на множестве первых двадцати натуральных чисел.

8. Множество M состоит из m элементов, а множество N из n элементов. Сколько существует функций, определенных на множестве M со значениями, принадлежащими множеству N?

Замечание. Задачи 8, 11, 18, 19 принадлежат к числу основных задач комбинаторики. Мы приводим их здесь, чтобы показать, что комбинаторика в значительной своей части и занимается подсчетом числа отображений того или иного типа конечных множеств в конечные множества.

9. Сколькими способами можно рассадить: а) двух гостей на двух стульях, б) трех — на трех стульях, в) шестерых — на шести стульях?

10. Множество E состоит из шести элементов. Показать, что существует ровно 720 функций, для которых E является как областью определения, так и множеством значений.

11. Отображение конечного множества на себя называется *подстановкой*. Число различных подстановок множества зависит только от числа его элементов n и обозначается $n!$. Покажите, что

$$1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24, \quad 5! = 120, \quad 6! = 720.$$

Укажите общий способ вычисления $n!$.

1.3. Обратимая функция.

12°. Какие из следующих функций обратимы и какие не обратимы:

$$f_1(x) = x^3, \; f_2(x) = x^4, \; f_3(x) = x^{17}, \; f_4(x) = x^{18}?$$

13. В классе за каждой партой сидит не более двух человек. Поставим в соответствие каждому ученику его соседа по парте, а если он сидит один, то его самого. Каково будет обратное отображение?

14. Пусть каждому слову русского языка поставлено в соответствие слово, записанное теми же буквами, но в обратном порядке (словом назовем любую конечную последовательность букв). Является ли эта функция обратимой? Если да, то какова обратная функция?

15. Отображение конечного множества на себя всегда обратимо. Дайте пример необратимого отображения множества натуральных чисел на себя.

16. Девять туристов должны разместиться в трех лодках. Сколькими способами они могут это сделать, если требуется, чтобы: а) в каждой лодке было по три человека, б) в каждой лодке было не более четырех и не менее двух человек, в) в каждой лодке плыл хотя бы один турист?

17*. Если у хозяев достаточно стульев, то не принято сажать на один стул более одного гостя: множество гостей отображается в множество стульев обратимым образом. Если в комнате всего шесть стульев, то сколькими способами можно рассадить на них: а) одного, б) двух, в) трех, г) четырех, д) пять, е) шесть гостей?

18*. Обратимые отображения одного конечного множества M в другое конечное множество N называются в комбинаторике *размещениями* (гостей «размещают» по стульям). Число отображений множества M в множество N зависит только от числа элементов m множества M и числа n элементов множества N и обозначает-

ся A_n^m. Покажите, что

$$A_1^1 = 1, \quad A_2^1 = A_2^2 = 2, \quad A_3^1 = 3, \quad A_3^2 = A_3^3 = 6, \quad A_{10}^2 = 90,$$

и установите общее правило вычисления A_n^m. Покажите, что всегда $A_n^{n-1} = A_n^n$.

19*. Задача 16 в) может быть сформулирована абстрактно: сколько существует отображений множества из девяти элементов на множество из трех элементов? Обозначим D_n^m число отображений множества из n элементов на множество из m элементов. Проверьте, что

$$D_3^2 = 6, \quad D_4^2 = 12, \quad D_4^3 = 36, \quad D_n^n = n!.$$

Попробуйте дать общее правило вычисления D_n^m (это несколько бо лее трудная задача, чем задачи 8, 11 и 18).

20*. Сколько существует функций, определенных на множестве из 28 элементов, которые принимают каждое из четырех значений П, К, С и В по семь раз?

Это задача о числе способов справедливо распределить в феврале дежурства между Петей, Колей, Сашей и Володей (пример 3 на с. 70).

2. ЧТО ТАКОЕ ГРАФИК ФУНКЦИИ?

Здесь продолжается изложение новой, более общей точки зрения на хорошо известные из школы понятия — функция и ее график. Начало этого изложения было дано в статье «Что такое функция?». Для понимания настоящей статьи необходимо владеть понятиями, которые определены в первой статье.

2.1. Напоминание и небольшие дополнения

По статье «Что такое функция?» вы познакомились с современным общим пониманием слова функция: функция — это совершенно произвольное отображение некоторого множества E на другое множество M. Множество E называется *областью определения функции*, а множество M — *множеством ее значений*. Чтобы задать функцию с областью определения E, надо указать для каждого элемента x этого множества вполне определенный объект *)

$$y = f(x).$$

---

*) Из первой статьи вы знаете, что значения функции могут быть не только числами, но и днями недели, мальчиками или девочками, вообще любыми предметами, или, как принято говорить, «объектами».

Каким бы способом мы это ни сделали, мы получим функцию с областью определения E. Если множество E состоит из учеников вашего класса, то можно, например, для любого ученика x принять за $y = f(x)$ вторую букву его имени (предполагая, что в классе нет учеников, имя которых состоит из одной-единственной буквы,— хотя я и знал девочку Олю, которую звали просто «О»).

При таком задании функции само собой определится множество ее значений M; это множество всех тех объектов y, для которых существует хоть один элемент x множества E, для которого

$$f(x) = y.$$

Поэтому, описывая смысл термина «функция», можно и не говорить в описании явно о множестве значений. Правильно будет, например, просто сказать, что «функция есть закон, по которому каждому элементу x некоторого множества E поставлен в соответствие вполне определенный объект $y = f(x)$». Мы подчеркивали, впрочем, что все эти описания лучше не считать определениями. Если бы мы захотели в самом деле определить понятие функции через понятие «закона», то с нас потребовали бы точное определение смысла термина «закон» и т. д. Понятие функции будем считать одним из основных понятий математики, смысл которого только поясняется, а не дается формальным определением.

В школе вы привыкли иметь дело только с числовыми функциями, область определения которых состоит из чисел и значения которых являются числами. Смысл выражения «числовая функция числового аргумента» не вполне определен. Ведь само понятие числа в школе постепенно обобщается. Мы остановимся на системе всех действительных чисел, с которой школьники знакомятся в девятом классе. Действительные функции действительного аргумента и изучаются по преимуществу в старших классах средней школы. Их графики вы умеете вычерчивать на «числовой плоскости».

В школьных учебниках пишут, что «числовая плоскость» — это такая плоскость, на которой некоторым определенным образом введены координаты. Если верить учебникам буквально, то числовых плоскостей очень много. Проводя на классной доске оси координат, учитель превращает в «числовую плоскость» плоскость этой доски; ученики на страницах своих тетрадок изготовляют все новые и новые «числовые плоскости», иногда по нескольку на одной странице!

В п. 2.3 этой статьи вы узнáете, с какой числовой плоскостью в действительности имеют дело математики. Но сначала мне хочется сделать одно дополнительное замечание к изложению статьи «Что такое функция?»

В школьном курсе алгебры чаще всего имеют дело с функциями, заданными «аналитически» при помощи формулы. Областью определения такой функции, если не сказано ничего другого, считается множество всех тех значений аргумента, для которых все предписанные формулой операции над числами выполнимы. Будем, например, как это принято в школе, считать знак $\sqrt{\ }$ знаком «арифметического» квадратного корня. Ясно, что формула

$$y = f(x) = (\sqrt{x})^2 \tag{1}$$

позволяет вычислить по заданному x соответствующее ему значение y лишь при неотрицательном x (иначе квадратный корень «не извлекается»).

При неотрицательном x

$$y = f(x) = x. \tag{2}$$

Формула (2) проще, чем формула (1), и хотелось бы ее считать формулой, определяющей нашу функцию. Но область определения функции, заданной формулой (2), состоит не из одних неотрицательных чисел x, а из всех чисел x. Если мы хотим дать новое определение той самой функции, которая определена формулой (1), надо написать

$$y = f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \geqslant 0, \\ \text{не определена} & \text{при } x < 0. \end{cases} \tag{3}$$

Подобным же образом функцию $g(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ можно записать так:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{при } x \neq 1, \\ \text{не определена} & \text{при } x = 1. \end{cases} \tag{4}$$

На школьных и вузовских экзаменах требуют полной точности в подобных вопросах.

2.2. График функции

Рассмотрим следующий график дежурств:

	пн	вт	ср	чт	пт	сб	вс
Петя	×				×		
Коля		×				×	
Саша			×				×
Володя				×			

Мы уже знаем, что это график функции: имя дежурного можно считать функцией дня недели. Так как дней недели семь, а мальчиков четверо, то мы нарисовали

$$7 \times 4 = 28$$

клеточек, но отметили крестиком только семь из этих клеточек. Если бы мальчики решили расположить свои имена по алфавиту, то получилась бы следующая табличка:

	пн	вт	ср	чт	пт	сб	вс
Володя				×			
Коля		×				×	
Петя	×				×		
Саша			×				×

Выглядит она по-другому, но изображает то же самое распределение дежурств — ту же самую функцию.

В обеих табличках 28 клеточек соответствуют 28 возможным парам

(*день недели*, *мальчик*).

Из этих 28 пар выделены семь пар

(пн, Петя), (вт, Коля), (ср, Саша), (чт, Володя),
(пт, Петя), (сб, Коля), (вс, Саша),

т. е. все пары, в которых день недели соединен с дежурным на этот день:

(день недели, дежурный на этот день),

или абстрактно: пары вида

$$(x,\ f(x)).$$

Только выбор этих пар и существен для задания функции.

После этого примера вам, быть может, не покажется неожиданным такое определение: *графиком функции f называется множество всех таких пар* *)

$$(x,\ y),$$

что: 1) *первый элемент пары x принадлежит области определения функции*, 2) *второй элемент пары $y = f(x)$*.

В нашем примере график функции f:

Γ_f = {(пн, Петя), (вт, Коля), (ср, Саша), (чт, Володя),
(пт, Петя), (сб, Коля), (вс, Саша)}.

*) Всюду в этой статье имеются в виду «упорядоченные пары». Пара (1, 2) отличается от пары (2, 1). Первый и второй элементы пары могут и совпадать: (1, 1) или (2, 2) — тоже пары.

Для функций, заданных таблицей

x	f_1	f_2	f_3	f_4
A	A	B	A	B
B	A	B	B	A

в соответствии с данным определением получим графики

$$\Gamma_1 = \{(A, A), (B, A)\}, \quad \Gamma_2 = \{(A, B), (B, B)\},$$
$$\Gamma_3 = \{(A, A), (B, B)\}, \quad \Gamma_4 = \{(A, B), (B, A)\}.$$

Ясно, что для функций с конечной областью определения число элементов графика (т. е. число входящих в график пар) равно числу элементов области определения функции. Для функций с бесконечной областью определения все пары

$$(x, f(x))$$

выписать нельзя. Приходится описывать эти пары при помощи их свойств.

Например, для функции

$$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

график состоит из всевозможных пар чисел вида

$$(x, \sqrt{1 - x^2}),$$

т. е. из всех пар (x, y), для которых выполнены два условия:

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ и } y \geqslant 0.$$

Это определение графика функции можно записать в виде

$$\Gamma_f = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, \ y \geqslant 0\}.$$

Самое общее определение графика функции f можно записать в виде такой формулы *):

$$\Gamma_f = \{(x, y) \mid \ y = f(x)\}.$$

Определив график функции как множество пар, каждая из которых состоит из значения аргумента и значения функции, соответствующего этому значению аргумента, мы освободили понятие графика от всего случайного. В этом абстрактном понимании у каждой функции имеется один-единственный график.

*) Мы воспользуемся стандартным обозначением, принятым в теории множеств. Запись $\{x \mid A(x)\}$ обозначает множество всех объектов x, удовлетворяющих условию $A(x)$. Например, $\{x \mid x^2 = 1\}$ — множество всех x, для которых $x^2 = 1$, т. е. множество из двух чисел: $\{+1, -1\}$.

2.3. Числовая плоскость

Обратимся к наиболее обычным в школе действительным функциям действительного переменного. В школе мы привыкли к тому, что графиком такой функции f называется множество тех точек $P(x, y)$ числовой плоскости, координаты которых x и y удовлетворяют равенству

$$y = f(x).$$

Эта формулировка и общее определение графика, данное выше в п. 2.2, похожи, но слегка отличаются. В п. 2.2 говорится о множестве пар (x, y), а в обычном школьном определении — о множестве точек P с координатами x и y. Но нет ли возможности привести эти две формулировки к полному согласию?

Оказывается, это очень просто. Это простое решение и получило всеобщее распространение в современной научной литературе. По определению считают, что *числовая плоскость есть множество всех пар действительных чисел*. Числовую плоскость обозначают $\mathbb{R}^2$. Ее определение можно символически записать в виде

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

Немного подумав, вы сами убедитесь в том, что при таком определении числовой плоскости обычное школьное определение графика действительной функции действительного переменного становится частным случаем общего определения, данного в п. 2.2.

Обозначение $P(x, y)$ для точки с координатами x и y делается теперь излишним. *Точками числовой плоскости в новом понимании являются просто сами пары чисел* (x, y). Можно говорить просто о «точке (0, 0)» (начало координат), о точках (1, 2), (—2, —1) и т. д.

Не лишне заметить, что и термину «числовая прямая» надо теперь придать новый смысл: *числовая прямая это просто само множество действительных чисел* $\mathbb{R}$. Естественно, что точками числовой прямой при этом надо считать просто сами действительные числа. Обычно в школьных учебниках этого не говорят прямо, но часто употребляют в применении к числам геометрический язык: множество чисел

$$[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

называют «отрезком», говорят, что «точка» 2 принадлежит «отрезку» [1, 3] и т. п.

Любое множество точек числовой плоскости будем называть расположенной на числовой плоскости *геометрической фигурой*. Такова, например, окружность с центром (0, 0) и радиусом единица: это множество точек, т. е. пар чисел (x, y), для которых

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Естественно, что точки и геометрические фигуры числовой плоскости можно наглядно изображать на чертеже. Для этого на реальной плоскости (листе бумаги или классной доске) выбирают оси координат и точку числовой плоскости (x, y) изображают реальной точкой с координатами x и y. Конечно, такое изображение может быть только приближенным. Начерченные на бумаге или классной доске графики являются лишь приближенными изображениями «настоящих» графиков функций, которые в нашем новом понимании суть просто множества числовой плоскости. К этим «настоящим» графикам и относится утверждение, что *функция полностью определяется своим графиком.*

Пусть задано множество пар

$$M = \{(x, y)\}.$$

Таким множеством, например, является любая «фигура» на числовой плоскости. Что надо дополнительно потребовать, чтобы это множество пар было *графиком* некоторой функции?

Рис. 9

Ответ не сложен: для этого необходимо и достаточно, чтобы в множестве M нельзя было найти две пары (x, y_1) и (x, y_2) с общим первым элементом x и различными вторыми элементами: $y_1 \neq y_2$. (Проведите доказательство сами.) На рис. 9 толстая кривая есть график функции, а тонкая графиком не является.

Множество пар (x, y), в котором не существует двух пар вида (x, y_1), (x, y_2), $y_1 \neq y_2$, можно назвать *функциональным графиком.* Заметьте, что мы сейчас определили «функциональный график», не пользуясь понятием «функции». Нельзя ли с этой стороны дать формальное определение и самого понятия функции, которое мы считали основным, т. е. не подлежащим формальному определению?

Я не хочу давать ответ на этот вопрос здесь. Он не совсем прост. Мы еще будем иметь повод вернуться как к современным представлениям о понятии функции, так и к его истории.

2.4. Геометрические преобразования

Чтобы освоиться с широтой общего понимания термина «функция», рассмотрим еще некоторые простейшие геометрические преобразования.

Чтобы повернуть плоскую фигуру вокруг точки O (рис. 10), можно перенести контуры фигуры на наложенную на плоскость чертежа кальку, закрепить кальку булавкой в точке O и, повернув кальку, перенести контуры копии фигуры с кальки на плоскость чертежа (например, при помощи копировальной бумаги). При повороте все

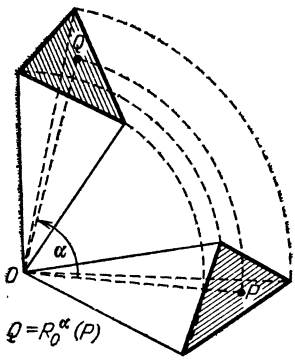


Рис. 10

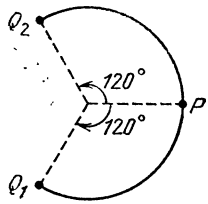


Рис. 11

точки фигуры поворачиваются вокруг точки O в одном и том же направлении на один и тот же угол.

Обозначим

$$Q = R_O^\alpha (P) \qquad (1)$$

положение точки P после поворота на угол α против часовой стрелки. Если точка O и угол α заданы, то каждой точке P по формуле (1) соответствует вполне определенная точка Q. Ясно, что в смысле нашего общего определения R_O^α есть функция. Ее областью определения является множество всех точек плоскости.

Углы поворота указывают со знаком. На рис. 11 точка Q_2 получается из точки P поворотом на 120°, а точка Q_1 — поворотом на —120° (или поворотом на 240°). Если точка Q получена из точки P поворотом на α градусов, то

точку P можно получить, повернув Q на $-\alpha$ градусов: если

$$Q = R_O^{\alpha}(P),$$

то

$$P = R_O^{-\alpha}(Q).$$

Мы видим, что *поворот* R_O^{α} *всегда является обратимой функцией.*

В применении к поворотам чаще говорят об «отображениях». *Отображение, обратное к повороту* R_O^{α}, *есть поворот* $R_O^{-\alpha}$. Символически можно написать:

$$R_O^{-\alpha}(R_O^{\alpha}(P)) = P, \quad (R_O^{\alpha})^{-1} = R_O^{-\alpha}.$$

Поворот отображает множество точек плоскости на самого себя. Если считать, что плоскость есть не что иное, как множество своих точек (так и поступают в современном изложении геометрии), то можно сказать, что *поворот есть обратимое отображение плоскости на себя.*

Обратимые отображения плоскости на себя и называются *геометрическими преобразованиями плоскости.* С геометрическими преобразованиями вы еще неоднократно встретитесь, пока же приведем еще только один пример геометрического преобразования плоскости. *Параллельным переносом называется отображение плоскости на себя*

$$P \to Q = T(P),$$

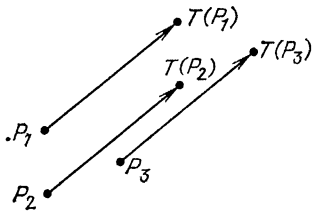


Рис. 12

при котором все точки P перемещаются на одно и то же расстояние и в одном и том же направлении (рис. 12).

2.5. Векторы

Хотя возможно, что вы уже устали от знакомства с новыми понятиями и необычным толкованием понятий вам уже известных, сделаем еще одно усилие. Постараемся понять, что такое г р а ф и к параллельного переноса $P \to Q = T(P)$. По общему определению это — множество всех таких пар точек

$$(A, B),$$

для которых

$$B = T(A).$$

Выберем одну такую пару точек (A_0, B_0). Чем характеризуются остальные? Тем, что отрезки AB равны по длине и одинаково направлены с отрезком A_0B_0 (рис. 13). График параллельного переноса есть по определению множество всех таких пар точек (A, B).

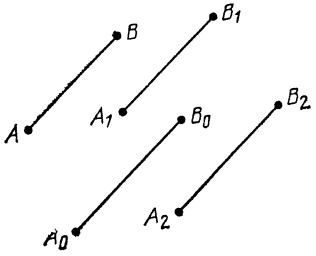


Рис. 13

Обычно считают, что любая пара точек (A, B) определяет «связанный вектор» $\overrightarrow{AB}$, связанные же векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$ определяют один и тот же «свободный вектор», если отрезки AB и $A'B'$ равны по длине и имеют общее направление.

Проще сказать, что «связанный вектор» это просто сама пара точек (A, B), а «свободный вектор» $\overrightarrow{AB}$ — это множество всех связанных векторов (A', B'), равных (A, B) по длине и направлению. А при общем определении графика это множество есть не что иное, как график параллельного переноса T, который определяется тем, что

$$T(A) = B.$$

Если

$$T(A_1) = B_1, \quad T(A_2) = B_2, \quad T(A_3) = B_3, \ldots$$

то пишут

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{A_3B_3} = \ldots = \boldsymbol{a},$$

$$T = T_{\overrightarrow{A_1B_1}} = T_{\overrightarrow{A_2B_2}} = T_{\overrightarrow{A_3B_3}} = \ldots = T_{\boldsymbol{a}}.$$

Логика образования общих понятий привела нас к несколько необычному утверждению: *свободный вектор* $\boldsymbol{a}$ *есть не что иное, как график соответствующего параллельного переноса* $T_{\boldsymbol{a}}$ *на вектор* $\boldsymbol{a}$. Будет хорошо, если вы полностью разберетесь в том, что этот вывод является неизбежным следствием принятых нами определений графика, свободного вектора (как множества равных по длине и направлению связанных векторов) и связанного вектора (как пары точек). Замечу, впрочем, что такие определения связанного вектора и свободного вектора не вполне общепринятны, хотя и представляются автору этой статьи самыми удобными.

З а д а ч и.

2.1. Напоминание и небольшие дополнения.

1. Какова область определения функций

а) $f_1(x) = \dfrac{x}{x - |x|}$, б) $f_2(x) = \dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x^2}}$,

в) $f_3(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$?

2. Какое условие надо добавить к формуле

$$f(x) = x^2 + 1,$$

чтобы она определила функцию f_3 из задачи 1?

3. Какое дополнительное условие надо добавить к формуле

$$f(x) = 1,$$

чтобы получилось определение функции

$$f_4(x) = (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{1-x})^2?$$

З а м е ч а н и е. В задачах 1—3 под знаком $\sqrt{}$ понимается «арифметический» квадратный корень, т. е. неотрицательное число.

2.2. График функции.

4. Сколько существует функций с областью определения 1, 2, 3, графики которых являются подмножествами множества пар

(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3)

(рис. 14)?

Сколько из этих функций имеют обратную?

5. Покажите, что график обратной функции f^{-1} определяется формулой

$$\Gamma_{f^{-1}} = \{(x, y) \mid (y, x) \in \Gamma_f\}.$$

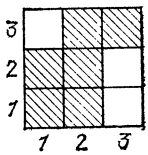


Рис. 14

Естественно, предполагается, что функция f имеет обратную.)

2.3. Числовая плоскость.

6. Опишите устройство графика функции Дирихле:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

7 *). Число x из отрезка [0; 1] разлагается в бесконечную т р о и ч н у ю д р о б ь

$$x = 0{,}x_1x_2x_3 \ldots \quad (x_n = 0, 1, 2).$$

Значение функции $y = C(x)$ определяется двоичной дробью

$$y = 0{,}y_1y_2y_3 \ldots (y_n = 0, 1)$$

---

*) Это — трудная задача (см. § 15 в книжке: Ф о м и н С. В. Системы счисления.— М.: Наука, 1968).

следующим образом:

если $x_n = 0$, то $y_n = 0$;

если $x_n = 1$ или $x_n = 2$, то:

$y_n = 1$ при условии, что среди цифр $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ не было единиц,

$y_n = 0$ при условии, что среди цифр $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ уже встречалась одна единица.

Попробуйте начертить график этой функции. Докажите, что он содержит бесконечное число горизонтальных отрезков. Если вы знакомы с понятием непрерывности функции, попробуйте доказать, что наша функция непрерывна.

Замечание. В этой задаче мы не избегаем троичных дробей, в которых все знаки, начиная с некоторого, двойки, и двоичных дробей, в которых все знаки, начиная с некоторого, единицы. Например, мы пишем в троичной системе

$$0{,}2222\ldots = 1;\ 0{,}12222\ldots = 0{,}200000\ldots$$

и в двоичной системе считаем, что

$$0{,}1111111\ldots = 1;\ 0{,}01011111\ldots = 0{,}01100000\ldots$$

2.4. Геометрические преобразования.

8. Опишите в геометрических терминах преобразования числовой плоскости, которые аналитически задаются формулами:

а) $(x, y) \to (-y, x)$, б) $(x, y) \to (x, -y)$,

в) $(x, y) \to (y, -x)$, г) $(x, y) \to (-x, y)$,

д) $(x, y) \to (x + 1, y)$, е) $(x, y) \to (x + a, y + a)$.

9. Докажите для поворотов вокруг общего центра O формулу

$$R_O^{\alpha}(R_O^{\beta}(P)) = R_O^{\alpha+\beta}(P). \qquad (1)$$

10. Докажите, что при любых центрах O_1 и O_2 преобразование

$$F(P) = R_{O_1}^{\alpha}(R_{O_2}^{-\alpha}(P))$$

будет параллельным переносом. На какое расстояние и в каком направлении?

2.5. Векторы.

11. Докажите формулу

$$T_a(T_b(P)) = T_{a+b}(P). \qquad (2)$$

12. Покажите, что преобразование

$$F(P) = T_a(R_O^{\alpha}(P))$$

является поворотом на угол α. Вокруг какого центра?

Замечание. Формулы (1) и (2) короче пишут

$$R_O^{\alpha}R_O^{\beta} = R_O^{\alpha+\beta}, \quad T_aT_b = T_{a+b}.$$

Взятие функции от функции во многих отношениях похоже на умножение. Но это уже особая тема, разработка которой не умещается в этой статье. Мы воспользуемся такой короткой записью функции от функции (композиции отображений) в задачах 13 и 14.

13. Докажите, что всегда

$$T_a T_b = T_b T_a$$

и

$$R_O^\alpha R_O^\beta = R_O^\beta R_O^\alpha$$

при поворотах вокруг общего центра. Покажите на примере, что, вообще говоря,

$$R_{O_1}^\alpha R_{O_2}^\beta \neq R_{O_2}^\beta R_{O_1}^\alpha$$

при поворотах вокруг различных центров O_1, O_2.

14. Выясните полностью вопрос о том, когда все-таки

$$R_{O_1}^\alpha R_{O_2}^\beta = R_{O_2}^\beta R_{O_1}^\alpha.$$

3. ФУНКЦИИ ДВУХ И МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ПЕРЕМЕННЫМИ И ИХ ГРАФИКИ

3.1. Функции двух переменных

Два различных по форме выражения $3x - 6$ и $3(x - 2)$ тождественно равны. Они являются записью одной и той же функции f:

$$x \to f(x) = 3x - 6 = 3(x - 2).$$

Аналогично положение с выражениями

$$(x + y)(x - y), \tag{1}$$

$$x^2 - y^2. \tag{2}$$

Они тождественно равны. Это значит, что правила

$$z = (x + y)(x - y), \quad z = x^2 - y^2$$

вычисления по паре чисел (x, y) третьего числа z равносильны: применяя их к какой-либо паре чисел, мы всегда получим одинаковый результат.

Вспомнив наше общее определение функции, мы видим, что выражения (1) и (2) можно считать записями *функции* f

$$(x, y) \to (x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

от *пары чисел*. Наша функция $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ определена для любой пары чисел (x, y), т. е. ее областью определения является числовая плоскость $\mathbb{R}^2$.

З а д а ч а. *Докажите, что множество значений этой функции есть вся числовая прямая.*

Общее понятие функции стало общепризнанным в математике лишь сравнительно недавно. Еще в начале нашего века не каждый математик понял бы выражение «функция от пары чисел». Вместо этого говорили «функция от двух переменных». Но с усвоенной нами общей точки зрения *функция от двух числовых переменных x и y есть не что иное, как функция, область определения которой является подмножеством множества упорядоченных числовых пар* (x, y), т. е. числовой плоскости.

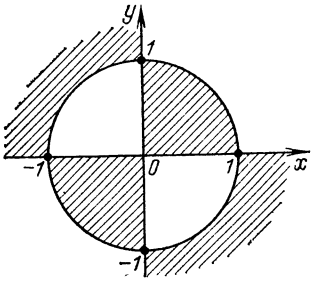


Рис. 15

Почему здесь говорится о *подмножестве* множества $\mathbb{R}^2$? Потому, что не всегда функция двух числовых переменных определена для всех пар чисел (x, y). Например, выражение $\sqrt{xy\ (1 - x^2 - y^2)}$ имеет смысл только тогда, когда подкоренное выражение неотрицательно. Область определения функции $f(x, y) = \sqrt{xy\ (1 - x^2 - y^2)}$ указана на рис. 15. Естественно, что во втором и четвертом квадрантах она простирается до бесконечности, что не удается изобразить на рисунке.

3.2. Функции любого числа переменных

С функциями нескольких переменных вы встречаетесь очень часто и в математике, и в ее применениях. Например, формула $m = \pi r^2 h \mu$ позволяет вычислить массу цилиндра по его радиусу r, высоте h и плотности материала μ. *Масса цилиндра оказывается функцией трех переменных r, h и μ.* Формула

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

выражает расстояние точки в пространстве от начала координат как функцию трех координат точки x, y и z.

Рассмотрим выражение

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z. \qquad (3)$$

Его числовое значение зависит от того, какие числа и в каком порядке мы поставим вместо переменных x, y, z:

$$f(1, 2, 3) = 2; \quad f(2, 3, 1) = 12; \quad f(3, 1, 2) = 8.$$

Равенство (3) можно рассматривать как запись функции от *упорядоченной тройки* чисел (x, y, z).

Таким образом, *функция от трех числовых переменных есть не что иное, как функция от упорядоченной тройки чисел.* Область определения такой функции является подмножеством множества $\mathbb{R}^3$ всех упорядоченных троек чисел. В нашем случае у функции (3) область определения совпадает со всем множеством $\mathbb{R}^3$.

Как же назвать множество $\mathbb{R}^3$ всех упорядоченных троек чисел? Вы знаете, что каждой такой тройке (x, y, z) можно поставить в соответствие точку в пространстве с координатами x, y, z. Точка эта однозначно определяется своими координатами. По заданной точке можно найти ее координаты. Значит, соответствие между упорядоченными тройками чисел и точками (при выбранной системе координат) *взаимно однозначно.* Поэтому естественно, подобно тому, как мы назвали множество $\mathbb{R}^3$ упорядоченных числовых пар числовой плоскостью, называть множество $\mathbb{R}^3$ *числовым пространством.*

Но как быть с функциями четырех переменных? Разумно сразу, не пугаясь этих слов, называть *n-мерным числовым пространством* $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, множество всех упорядоченных последовательностей из n чисел

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

или, как иногда говорят, всех *упорядоченных n-ок чисел.*

Функцией n числовых переменных будем называть функцию

$$f(x_1, \ldots, x_n),$$

область определения которой есть подмножество n-мерного числового пространства $\mathbb{R}^n$.

Ясно, что двумерное числовое пространство — это числовая плоскость, а трехмерное числовое пространство — это то, что мы немного выше назвали просто «числовым пространством».

Числовая функция $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ от числовых переменных — это отображение некоторого подмножества n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$ в числовую прямую $\mathbb{R}$.

3.3. Зависимость между двумя переменными; их графики

Уравнение

$$y = x^2 \tag{4}$$

определяет y как функцию от x. График этой функции есть множество всех точек числовой плоскости (x, y), для кото-

рых выполняется равенство (4). А как быть в случае уравнения

$$x^2 + y^2 = 1? \qquad (5)$$

Множество точек, для которых выполняется равенство (5), есть окружность (рис. 16). Здесь каждому значению x ($|x| \leqslant 1$) соответствуют два значения y: $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$.

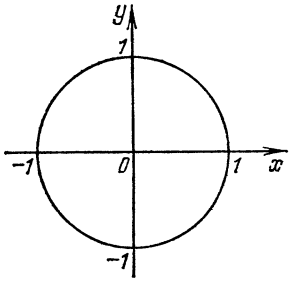


Рис. 16

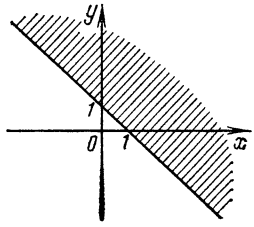


Рис. 17

Уравнение (5) не определяет y в качестве функции x. Не определяет это уравнение и функциональной зависимости x от y: если $|y| \leqslant 1$, то такому y соответствуют два значения x: $x = \pm\sqrt{1 - y^2}$. Но окружность рисунка 16 является *графиком зависимости* (5).

Зависимость между двумя переменными может быть установлена и при помощи неравенства, например неравенства

$$x + y > 1. \qquad (6)$$

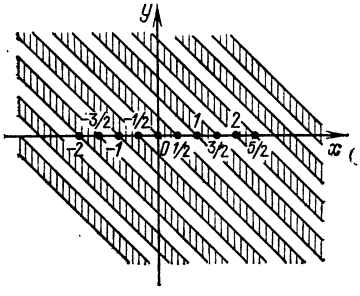


Рис. 18

График этой зависимости является открытой полуплоскостью, лежащей вправо и вверх от прямой $y = -x + 1$ (рис. 17). Разберем более сложный пример зависимости

$$\{x + y\} \leqslant \frac{1}{2},$$

где скобки { } обозначают дробную часть стоящего в них числа.

График этой зависимости изображен на рис. 18; он состоит из бесконечного числа полос. Полоса с номером k (k — целое число) ограничена слева и снизу прямой $x + y = k$, а справа и сверху — прямой $x + y = k + {}^1/_2$.

График уравнения или неравенства с двумя неизвестными называют иначе *множеством решений* этого уравнения или неравенства.

Заметьте, что такое отождествление понятий графика и множества решений получилось в результате нашего понимания термина «числовая плоскость». Ведь у нас теперь «точка графика» есть просто пара чисел (x, y) (как всегда — упорядоченная), удовлетворяющая уравнению!

3.4. Системы уравнений и неравенств

При решении системы уравнений и неравенств ищут их *общие* решения: множество решений системы есть *пересечение* множеств решений, входящих в систему уравнений и неравенств.

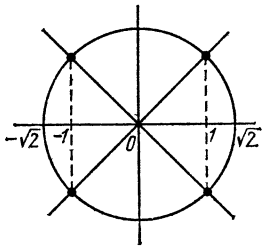


Рис. 19

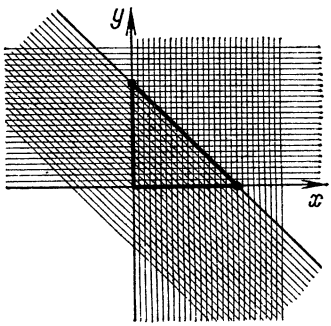


Рис. 20

Пример 1. Множество решений системы двух уравнений

$$x^2 - y^2 = 0, \quad x^2 + y^2 = (\sqrt{2})^2$$

состоит из четырех точек (рис. 19):

$$(1, 1), \quad (1, -1), \quad (-1, 1), \quad (-1, -1).$$

Пример 2. Множество решений системы трех неравенств

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad x + y \leqslant 1$$

есть треугольник (рис. 20).

Пусть даны уравнения $a(x, y) = 0$, $b(x, y) = 0$. Обозначим через A и B множества их решений. Как составить одно уравнение с множеством решений $A \cap B$ — *пересечением* множеств A и B, т. е. одно уравнение, равносиль-

ное системе наших двух уравнений? Ответ очень прост *):

$$a^2(x, y) + b^2(x, y) = 0.$$

Пример 3. График зависимости $\{x\}^2 + \{y\}^2 = 0$ состоит из точек (x, y), для которых обе координаты — целые числа (рис. 21).

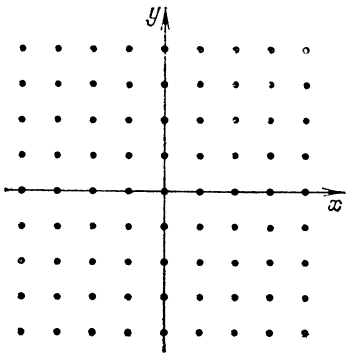


Рис. 21

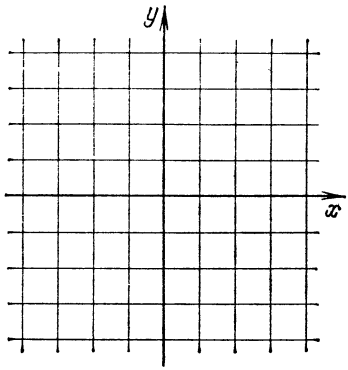


Рис. 22

Кроме операции пересечения множеств вы знакомы с операцией *объединения множеств*: $A \cup B$. Как по уравнениям

$$a(x, y) = 0, \quad b(x, y) = 0$$

с множествами решений A и B составить одно уравнение с множеством решений $A \cup B$? Ответ тоже прост:

$$a(x, y) \cdot b(x, y) = 0.$$

Пример 4. График зависимости $\{x\} \cdot \{y\} = 0$ изображен на рис. 22.

3.5. Графическое представление функций двух переменных и зависимостей между тремя переменными

По общему определению график функции

$$z = f(x, y) \tag{7}$$

состоит из тех пар $((x, y), z)$, для которых выполнено равенство (7). Эти пары, в которых первый элемент пары сам является парой, находятся в естественном соответствии

*) Здесь, как обычно, под $a^2(x, y)$ понимается $(a(x, y))^2$.

с тройками (x, y, z). Поэтому график числовой функции двух числовых переменных можно считать подмножеством трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$.

Можно было бы подробнее развить эту тему: представление функций двух переменных при помощи графиков, являющихся поверхностями в трехмерном пространстве. Но практическое «сооружение» таких графиков является делом довольно громоздким.

Существует другой способ графического представления функций двух переменных — при помощи *линий уровня*. Линия уровня функции (7) — это график на плоскости (x, y) уравнения

$$f(x, y) = C,$$

где C — постоянное число. У функции много линий уровня: каждому числу C соответствует своя линия уровня.

Пример 5. На рис. 23 изображены линии уровня функции $f(x) = x^2 + y^2$. Линия уровня $C = 0$ состоит из одной точки, линии уровня при $C < 0$ являются пустыми множествами.

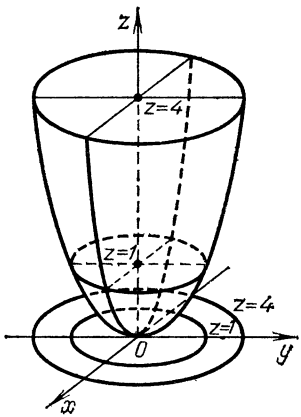


Рис. 23

Уравнение (7) является частным случаем уравнения с тремя переменными. Любое уравнение с тремя переменными, перенеся все члены в левую часть, можно записать в виде

$$F(x, y, z) = 0. \qquad (8)$$

Заменяя переменное z константой C, получим уравнение с двумя переменными:

$$F(x, y, C) = f_C(x, y) = 0,$$

график которого лежит в плоскости (x, y). Совокупность этих графиков (линий уровня для переменного z) дает графическое представление зависимости (8). Такой способ графического представления зависимостей между тремя переменными называется «сетчатой номограммой».

Задачи.

1. Найдите области определения функций:

а) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$;

б) $f(x, y) = \sqrt{(x^2 - y^2)(y - x^2)}$.

Изобразите эти области определения на числовой плоскости.

2. Найдите множества значений функций:

а) $f(x, y, z) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-z^2}$;

б) $g(x, y) = \frac{[x]}{y}$; в) $f(x, y) = \frac{\{x\}}{\{y\}}$.

3. Постройте графики уравнений и неравенств:
а) $\{x\} = \{y\}$; б) $[x] = [y]$; в) $\{x\}^2 + \{y\}^2 = 1$;
г) $\{x\}^2 + \{y\}^2 \leqslant 1$; д) $|x| + |y| = 1$; е) $|x| - |y| = 1$;
ж) $x + |y| = 1$; з) $x - |y| = 1$.

4. Постройте графики каждого из уравнений и неравенств следующих систем; решите системы алгебраически и сравните алгебраическое решение с графическим:

а) $\begin{cases} (x-3)^2 + (y-3)^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 2, \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 \leqslant 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ xy - 2x - 3y + 6 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 2, \\ x \leqslant y \leqslant x^2. \end{cases}$

5. При каких a зависимости

$$x^2 + y^2 = 1, \quad 2y - x \geqslant a$$

а) определяют y как функцию x?
б) x как функцию y?

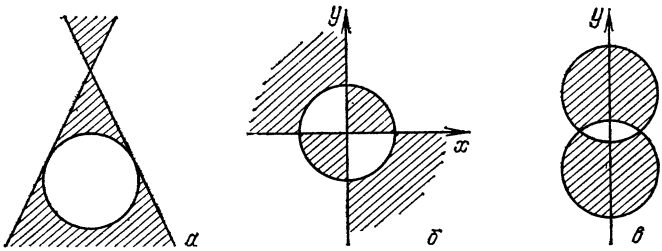


Рис. 24

6. Придумайте многочлен $P(x, y)$ четвертой степени, который положителен в областях такого вида, как заштрихованные на рисунках 24, *а*, *б*, *в*. (*Указание*. Начните с того, чтобы подобрать уравнения прямых и окружностей, расположенных требуемым образом.)

4. ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

По новым школьным программам *) школьники в пятом классе знакомятся с понятием «отображение множества на множество». В шестом классе они знакомятся с понятием «обратимое отображение» (в другой терми-

*) Речь идет о 70-х годах.— *Примеч. сост.*

нологии, привычной многим читателям «Кванта»,— «взаимно однозначное отображение»).

Каждое обратимое отображение имеет *обратное* отображение. Например, поворот $R_O^{70°}$ вокруг точки O на 70° *против часовой стрелки* (рис. 25) имеет своим обратным

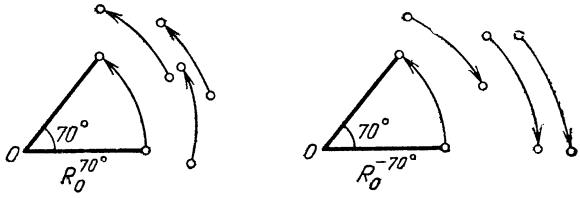


Рис. 25

отображением поворот вокруг той же точки O на 70°, но уже *по часовой стрелке*. В новом учебнике геометрии этот поворот обозначается $R_O^{-70°}$ (поворот вокруг точки O на *минус* 70°).

В седьмом и восьмом классах школьники знакомятся с понятием «композиция отображений». Рассмотрим для примера два перемещения плоскости, т. е. два отображения плоскости на себя, с о х р а н я ю щ и х расстояния. В качестве первого перемещения возьмем осевую симметрию S_x с осью x, в качестве второго — осевую симметрию S_y с осью y, перпендикулярной оси x (рис. 26). *Что получится, если произвести эти два отображения последовательно: сначала S_x, а потом S_y?*

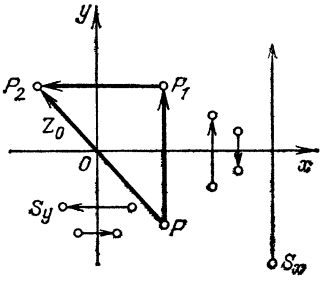


Рис. 26

Точка P при осевой симметрии S_x перейдет в симметричную ей относительно оси x точку P_1, а при симметрии S_y точка P_1 перейдет в точку P_2. Сказанное можно записать в виде равенства

$$P_2 = S_y\,(S_x\,(P)).$$

С другой стороны, точку P_2 можно получить непосредственно из точки P при помощи центральной симметрии Z_0 с центром O — точкой пересечения прямых x и y:

$$P_2 = Z_O\,(P).$$

Докажите самостоятельно, что для любой точки P плоскости

$$S_y(S_x(P)) = Z_O(P)$$

(предполагается, как было сказано, что прямые x и y перпендикулярны и пересекаются в точке O).

Говорят, что *отображение Z_O есть «композиция» отображений S_x и S_y*; записывают этот факт в виде равенства

$$Z_O = S_y \circ S_x.$$

Здесь кружочек $\circ$ есть *знак операции над отображениями*. Подобно тому, как операция сложения (знак «+») или умножения (знак «×»), примененные к паре чисел (a, b), дают новые числа:

$$c = a + b, \quad d = a \times b,$$

операция композиции, примененная к двум отображениям, порождает новое отображение.

Нас будут занимать обратимые отображения некоторого множества M на себя. Такие отображения называют «преобразованиями множества M». В качестве примеров приведем перемещение плоскости, гомотетию, преобразование подобия.

Пусть множество M есть плоскость. Рассмотрим *множество G всех перемещений этой плоскости*, т.е. множество всех отображений F плоскости M на себя, сохраняющих расстояния: для любых двух точек P и Q плоскости M

$$|F(P)\,F(Q)| = |PQ|.$$

Все перемещения обратимы, и потому по указанной выше терминологии они являются *преобразованиями плоскости*.

Наше множество G обладает двумя интересными свойствами: (1) *композиция двух преобразований из G принадлежит G*, т. е. композиция двух перемещений есть перемещение;

(2) *вместе с преобразованием F множеству G всегда принадлежит и обратное преобразование*, т. е. преобразование, обратное к перемещению, также есть перемещение.

Определение. Совокупность преобразований множества A, обладающая свойствами (1) и (2), называется *группой преобразований множества A*.

В силу сказанного множество всех перемещений плоскости может служить примером группы преобразований плоскости. Другим примером может служить множество всех преобразований подобия.

Существуют, однако, и гораздо более простые примеры. Рассмотрим, например, *множество G_1 всех перемещений, которые равносторонний треугольник ABC* (рис. 27) *отображают на самого себя.* Легко указать шесть таких перемещений:

1) тождественное отображение E, отображающее любую точку P плоскости на себя;

2) поворот $R_O^{120°}$ вокруг центра треугольника O на 120° против часовой стрелки;

3) поворот $R_O^{-120°}$ вокруг центра O на 120° по часовой стрелке;

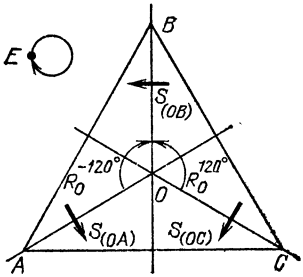


Рис. 27

4), 5), 6) осевые симметрии $S_{(OA)}$, $S_{(OB)}$, $S_{(OC)}$.

Задача 1. Докажите, что множество G_1 состоит только из перечисленных шести перемещений.

Задача 2. Проверьте, что каждое из перемещений E, $S_{(OA)}$, $S_{(OB)}$, $S_{(OC)}$ обратно самому себе, а перемещения $R_O^{120°}$ и $R_O^{-120°}$ обратны друг другу.

Задача 3. Проверьте и дополните таблицу 1 «композиций» для множества G_1.

Таблица 1

$\circ$	E	$S_{(OA)}$	$S_{(OB)}$	$S_{(OC)}$	$R_O^{120°}$	$R_O^{-120°}$
E	$E \circ E = E$	$S_{(OA)}$	$S_{(OB)}$	$S_{(OC)}$	$R_O^{120°}$	$R_O^{-120°}$
$S_{(OA)}$	$S_{(OA)} \circ E = S_{(OA)}$	E	$R_O^{-120°}$			
$S_{(OB)}$		$S_{(OB)} \circ S_{(OA)} = R_O^{120}$				
$S_{(OC)}$						
R_O^{120}						
R_O^{-120}						

Решив задачи 2 и 3, вы установите, что множество G_1 обладает свойствами (1) и (2) из определения группы преобразований, то есть что G_1 — группа преобразований плоскости. Можно доказать более общий факт: *множество G_Φ всех перемещений плоскости, которые отображают какую-либо заданную фигуру Φ на себя, есть группа преобразований плоскости.* Доказательство не сложно (прове-

дите его!). Группа G_Φ называется *группой симметрии фигуры* Ф.

Из таблицы композиций множества G_1 мы видим, что композиция перемещений не всегда переместительна:

$$S_{(OA)} \circ S_{(OB)} = R_O^{-120^\circ} \neq R_O^{120^\circ} = S_{(OB)} \circ S_{(OA)}.$$

Можно, однако, доказать, что *операция композиции преобразований множества G_1 всегда обладает свойством ассоциативности*:

$$F_3 \circ (F_2 \circ F_1) = (F_3 \circ F_2) \circ F_1$$

(попробуйте сделать это).

Любое перемещение, отображающее треугольник ABC на себя, отображает множество $U = \{A; B, C\}$ вершин треугольника на себя в соответствии с таблицей 2.

Таблица 2

x	$E(x)$	$S_{(OA)}(x)$	$S_{(OB)}(x)$	$S_{(OC)}(x)$	$R_O^{120^\circ}(x)$	$R_O^{-120^\circ}(x)$
A	A	A	C	B	C	B
B	B	C	B	A	A	C
C	C	B	A	C	B	A
	e	s_1	s_2	s_3	r_1	r_2

В нижней строке даны обозначения отображений множества U на себя, заданных нашей таблицей. Например, функция s_2 (вспомните: отображение и функция — синонимы!) полностью задается равенствами $s_2(A) = C, s_2(B) = B$, $s_2(C) = A$. Область ее определения есть множество U, множество значений — то же множество U. Конечно, ее нельзя путать с отображением $S_{(OB)}$, которое отображает плоскость M на себя!

Преобразования e, s_1, s_2, s_3, r_1, r_2 образуют *группу G_2 преобразований множества U*.

Задача 4. Запишите таблицу композиций для группы G_2. Укажите для каждого ее элемента обратный элемент.

Группа перемещений G_1 и определенная сейчас группа G_2 в некотором смысле слова «устроены совершенно одинаково». Они «изоморфны». Что это значит на строгом языке математики, вы можете узнать из статьи Л. Садовского и М. Аршинова, опубликованной в журнале «Квант» № 10 за 1976 год.

Задача 5. Исследуйте аналогичным образом:
а) группу симметрии отрезка AB,
б) группу симметрии квадрата $ABCD$.

5. ВВЕДЕНИЕ К «КУРСУ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ ШКОЛ»

5.1. Множества и переменные

Понятие множества — одно из основных в математике.

Пример 1. Множество решений уравнения

$$x^3 - x = 0$$

состоит из трех чисел -1, 0 и 1. Это множество конечно, его можно задать, перечислив все его элементы. Обозначением конечного множества могут служить фигурные скобки, внутри которых записаны один за другим его элементы. В нашем случае это

$$\{-1,\ 0,\ 1\}.$$

Записи

$$\{0,\ 1,\ -1\},\quad \{1,\ 0,\ -1\}$$

обозначают то же самое множество. Множество полностью определяется запасом входящих в него элементов.

Пример 2. Множество решений уравнения

$$|x| - x = 0$$

состоит из всех неотрицательных чисел. Это множество бесконечно, и его нельзя задать, выписав все его элементы. Можно его обозначить так:

$$\{x : x \geqslant 0\}.$$

Вообще,

$$\{x : A\ (x)\}$$

будет обозначать множество всех объектов x, которые обладают свойством $A\ (x)$.

Пример 3. Расстояние между двумя точками A и B будем обозначать $|AB|$. Сфера $S\ (O,\ r)$ с центром O и радиусом r есть множество

$$\{X : |OX| = r\}$$

всех точек X, находящихся от точки O на расстоянии r. В нашем курсе геометрии мы примем определение: *геометрическая фигура — это множество точек.*

Пример 4. Множество

$$\{X : |AX| + |XB| = |AB|\}$$

есть отрезок AB (объясните, почему!).

Пример 5. Множество решений уравнения

$$(x-1)^2+y^2=1 \qquad (1)$$

состоит из всех пар чисел (x, y), для которых выполняется равенство (1) (рис. 28). Его можно обозначить

$$\{(x, y) : (x-1)^2+y^2=1\}.$$

Ему принадлежат, например, пары (0,0), (1, 1), (1, —1), (2, 0).

Заметьте, что, говоря о «парах», мы будем всегда иметь в виду упорядоченные пары, и не путайте их с множествами из двух элементов. В паре первый элемент может совпадать со вторым, как в паре (0, 0), пары же (2, 0) и (0, 2) различны (вторая не является решением уравнения (1)).

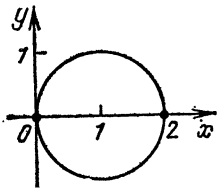


Рис. 28

В примерах 1—4 мы уже пользовались буквами для обозначения произвольного элемента некоторого множества. В первом примере буква x обозначала любой корень уравнения $x^3-x=0$, во втором примере та же буква обозначала любой корень уравнения $|x|-x=0$, или, что то же самое,— любое неотрицательное число, в третьем примере прописная буква X обозначает любую точку окружности $S(O, r)$, в четвертом — отрезка AB.

Буква, обозначающая произвольный элемент некоторого множества, называется «переменной» («переменная» — существительное женского рода, говорят просто «переменная x», «переменная y» и т.д.).

В примере 5 переменные x и y по смыслу задачи связаны зависимостью (1). Значению $x=0$ соответствует единственное значение $y=0$, а значению $x=1$ соответствуют два значения: $y=1$ и $y=-1$. Но при введении переменных можно указывать множество их «возможных значений» с избытком. В примерах 1, 2 и 5 можно считать, что x и y обозначают произвольные числа и лишь потом ставить вопрос о тех значениях этих переменных, при которых выполняются заданные уравнения. В алгебре мы обычно будем иметь дело с такими числовыми переменными.

Замечание. В математической логике вводятся «логические переменные», обозначающие совсем произвольные объекты мысли. Но в отдельных конкретных областях математики имеют де-

ло только с переменными, множество возможных значений которых заранее ограничено: с переменными числами, переменными точками, переменными векторами и т.п.

Удобно обозначать множества прописными латинскими буквами, а их элементы — строчными латинскими буквами. К сожалению, это соглашение не всегда удается

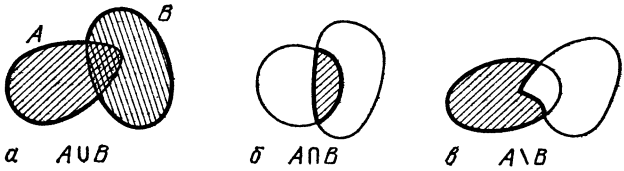


Рис. 29

выдержать, но во всяком случае его следует держаться в общих рассуждениях о множествах (в элементах «теории множеств»). Введем знак принадлежности $\in$:

$$a \in A$$

обозначает, что элемент a принадлежит множеству A. По аналогии со знаком неравенства $\neq$ образуем еще знак «непринадлежности»:

$$a \notin A.$$

В курсе алгебры вы познакомитесь с некоторыми операциями над множествами:

а) $A \cup B = \{x : x \in A$ или $x \in B\}$ — объединение множеств (рис. 29, *а*),

б) $A \cap B = \{x : x \in A$ и $x \in B\}$ — пересечение множеств (рис. 29, *б*),

в) $A \setminus B = \{x : x \in A$ и $x \notin B\}$ — разность множеств (рис. 29, *в*).

5.2. Отображения

В курсе алгебры восьмилетней школы вы знакомились с понятием функции.

Пример 1. Каждая из формул

$$y = \frac{x}{x-1}, \tag{1}$$

$$y = 1 + \frac{1}{x-1}, \tag{2}$$

позволяет по любому числу x, $x \neq 1$, вычислить соответствующее значение переменной y. Каждая из наших формул определяет функцию, определенную на множестве всех чисел x, отличных от $x = 1$.

Формулы (1) и (2) различны, но при любом заданном $x \neq 1$ мы получим по формуле (1) и по формуле (2) одно и то же значение y. Эти формулы определяют одну и ту же функцию

$$y = f(x).$$

Функция — это сам закон соответствия, позволяющий каждому значению x из некоторого множества найти соответствующее этому x значение y (независимо от того, каким способом представлен этот закон). Чтобы подчеркнуть этот смысл понятия «функция», в современной математике пользуются такими записями:

$$x \to \frac{x}{x-1}, \tag{1'}$$

$$x \to 1 + \frac{1}{x-1}. \tag{2'}$$

Выбор буквы, обозначающей аргумент функции, тоже не существен. Запись

$$y \to \frac{y}{y-1} \tag{1''}$$

определяет ту же самую функцию f, что и запись (1').

Пример 2. Пусть M — точка плоскости, а N — ее ортогональная проекция на некоторую прямую l (рис. 30). Здесь по любой точке M плоскости находится вполне определенная новая точка N. Можно сказать, что мы тоже имеем дело с *функцией*, только аргументом (независимой переменной) для этой функции является *переменная точка плоскости*, а значение функции является *точкой прямой*, на которую производится проектирование.

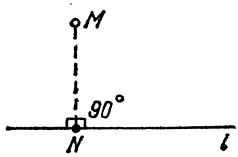


Рис. 30

В геометрии чаще, впрочем, в таких случаях говорят об *отображениях*. В нашем курсе математики слова «функция» и «отображение» — синонимы, они обозначают одно и то же понятие. Как и понятие множества, понятие отображения (функции) принадлежит к числу основных понятий математики, и мы не даем ему фор-

мального определения. Сказанное выше и далее служит лишь пояснением смысла этого понятия, а не определением.

Отображение всегда определено на каком-либо множестве, называемом его «областью определения». Отображение f ставит каждому элементу x своей области определения D_f вполне определенный объект

$$y = f(x).$$

Множество всех объектов y, соответствующих всевозможным $x \in D_f$, называется *множеством значений отображения* (функции) и обозначается E_f.

С понятием отображения легче всего освоиться, разобравшись в отображениях конечных множеств.

Пример 3. Трое друзей имеют две палатки. Они могут расселиться в этих палатках восемью способами. Друзей обозначим буквами А (Андрей), Б (Боря), В (Володя), а палатки номерами 1 и 2. Восемь способов расселения даны в таблице:

	1	2	3	4	5	6	7	8
А	1	1	1	1	2	2	2	2
Б	1	1	2	2	1	1	2	2
В	1	2	1	2	1	2	1	2

При первом способе все трое поселяются в первой палатке, при втором — Андрей и Боря в первой палатке, а Володя во второй и т. д.

При решении задачи нам пришлось отобразить множество *друзей* в множество *палаток*.

Запомните терминологию: отображение множества M на множество N — это отображение с областью определения M и множеством значений N. Понятие отображения множества M в множество N шире: это — отображение с областью определения M и множеством значений, являющимся подмножеством множества N.

Отображение (функция) f множества M в множество N называется *обратимым* (говорят еще *взаимно однозначным*), если различным элементам области определения M оно ставит в соответствие различные элементы из N (т. е. для любого y из области значений f существует ровно один $x \in M$ такой, что $f(x) = y$).

Множество A есть подмножество множества B, если каждый элемент A входит и в B; обозначение: $A \subset B$. В примере 3 мы имеем восемь отображений

множества {А, Б, В} в множество {1, 2}, но только шесть из них являются отображениями {А, Б, В} на {1, 2}. Внимательно следите за употреблением предлогов «в» и «на».

Замечание. Подсчеты, связанные с определением числа подмножеств конечного множества и числа того или иного типа отображений конечного множества в другое конечное множество, составляют начальное содержание комбинаторики, с которой вы познакомитесь более подробно в курсе алгебры, а потом в небольшом курсе теории вероятностей, который в нашей школе *) читается во втором полугодии девятого класса.

5.3. Начальные сведения о действительных числах

По восьмилетней школе вы знакомы с рациональными числами. Каждое рациональное число можно записать в виде дроби

$$\frac{m}{n},$$

где знаменатель n — натуральное число, а числитель m — целое число. Две дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ являются записью одного и того же рационального числа в том случае, когда

$$mq = pn.$$

Для рациональных чисел

$$r = \frac{m}{n}, \quad s = \frac{p}{q}$$

(знаменатели натуральные) имеет место неравенство

$$r < s$$

в том и только в том случае, когда

$$mq < pn.$$

Сложение, вычитание, умножение и деление рациональных чисел всегда (кроме невозможного деления на нуль) приводит вновь к рациональным числам и в принципе мо-

*) В физико-математической школе-интернате № 18 при МГУ.— *Примеч. сост.*

жет выполняться по правилам:

$$\frac{m}{n} \pm \frac{p}{q} = \frac{mq \pm np}{nq};$$

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq};$$

$$\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \begin{cases} \frac{mq}{np} & \text{при } p > 0, \\ \frac{-mq}{-np} & \text{при } p < 0. \end{cases}$$

Таким образом, ваши знания в области арифметики рациональных чисел покоятся на достаточно прочном для ближайшего времени основании. Но в задачах вам неоднократно приходилось пользоваться и не рациональными числами. Таковы, например, числа $\sqrt{2}$ и π — отношение длины окружности к диаметру.

С более обширным запасом чисел — множеством $\mathbb{R}$ всех действительных чисел вы обстоятельно познакомитесь в дальнейшем. Пока придется ограничиться приблизительными наглядными пояснениями. Такое положение на практике не так опасно, так как с любой заданной точностью (с точностью до 10^{-n}, где n — любое натуральное число) каждое действительное число может быть приближено к рациональному. Например, отношение диагонали квадрата к стороне с точки зрения строгой геометрии равно *иррациональному* числу $\sqrt{2}$, но на практике всегда достаточно того или иного приближенного рационального значения, в одних задачах

$$\sqrt{2} \approx 1{,}41,$$

и в других более точного

$$\sqrt{2} \approx 1{,}4142136$$

и т. п.

Достаточно наглядное представление о действительных числах можно получить, опираясь на знакомое вам изображение чисел точками прямой. Выбрав на прямой на-

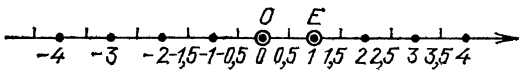


Рис. 31

чальную точку O, соответствующую числу нуль, и точку E, соответствующую числу единица, вы уже умеете находить точки, соответствующие любым другим рацио-

нальным числам (рис. 31). Отложив в положительном направлении от точки O отрезок, равный диагонали единичного квадрата (рис. 32), получим точку, изображающую иррациональное число $\sqrt{2}$.

Вообще, действительные числа — это как раз тот запас чисел, который позволяет на прямой OE сопоставить каждой точке X одно определенное число x, причем и обратно, для каждого действительного числа находится точно одна соответствующая ему точка. Отображение

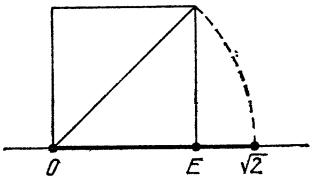


Рис. 32

$$X \to x$$

множества всех точек прямой на множество $\mathbb{R}$ действительных чисел оказывается обратимым. Оно определяет обратное отображение

$$x \to X$$

множества действительных чисел $\mathbb{R}$ на множество точек прямой.

Неравенства между действительными числами имеют тот же геометрический смысл, как и для рациональных чисел: $x < y$, если точка Y на прямой OE лежит «вправо» (т. е. в направлении от O к E) от точки X.

Мы обойдемся пока без точного определения смысла арифметических действий над иррациональными числами. Заметим только, что арифметические операции сложения, вычитания, умножения и деления для действительных чисел сохраняют все основные свойства, известные вам для случая рациональных чисел. Остается без изменений определение абсолютной величины (модуля) числа и сохраняется неравенство

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

5.4. Приближенные вычисления

Практические вычисления ведутся в десятичной (в современной машинной технике — в двоичной) системе счисления с точностью до единиц какого-либо разряда. Например, если вычисления ведутся с точностью до 10^{-3} (до третьего знака после запятой), то при-

нимают:

$$1/3 = 0{,}333, \quad \sqrt{2} = 1{,}414,$$

и т. д. Мы видим, что здесь исчезает различие между иррациональным и рациональным числами ($\sqrt{2}$ и $1/3$ — оба заменяются десятичными их приближениями).

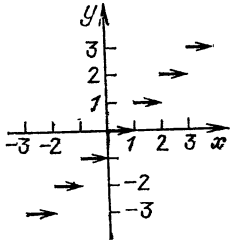


Рис. 33

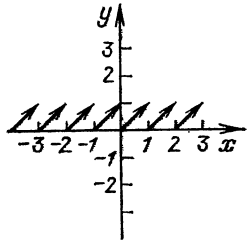


Рис. 34

Наибольшее целое число, не превосходящее числа x, *называется целой частью* x и обозначается $[x]$:

$$[2] = [2{,}1] = 2, \ [0] = [0{,}5] = 0, \ [-6{,}2] = -7.$$

Разность $x - [x]$ называется *дробной частью* и обозначается $\{x\}$:

$$\{2\} = 0, \ \{2{,}1\} = \{-7{,}9\} = 0{,}1.$$

На рис. 33 и 34 изображены графики функций $y = [x]$ и $y = \{x\}$.

Число

$$x_n = 10^{-n}[10^n x]$$

есть десятичное приближение к x *по недостатку* с точностью до 10^{-n}. Всегда

$$x_n \leqslant x < x_n' = x_n + 10^{-n}.$$

Число x заключено между x_n и x_n', причем

$$x_n' - x_n = 10^{-n},$$

и, значит,

$$|x - x_n| \leqslant 10^{-n}, \quad |x - x_n| \leqslant 10^{-n}.$$

Если из двух приближений x_n и x_n' выбрать лучшее — x_n^*, то оно удовлетворяет неравенству

$$|x - x_n^*| \leqslant 0{,}5 \cdot 10^{-n}.$$

Именно его выбирают при составлении таблиц.

Например, в пятизначных таблицах квадратных корней вы найдете значение

$$\sqrt{5} \approx 2{,}23607.$$

Это значит, что

$$2{,}236065 \leqslant \sqrt{5} \leqslant 2{,}236075.$$

Поэтому в четырехзначных таблицах стоит

$$\sqrt{5} \approx 2{,}2361.$$

По этой же причине четырехзначное приближение к числу π дается в виде 3,1416, хотя с шестью знаками

$$\pi \approx 3{,}1415927.$$

5.5. Приближенные вычисления. Абсолютная и относительная ошибка

К сожалению, десятичными приближениями x_n и x_n' предыдущего пункта не удается пользоваться при вычислениях. Если

$$0{,}3456 \leqslant x \leqslant 0{,}3457, \quad 0{,}6543 \leqslant y \leqslant 0{,}6544,$$

то относительно суммы $x + y$ мы знаем только, что

$$0{,}9999 \leqslant x + y \leqslant 1{,}0001.$$

При приближенных вычислениях приходится считаться с тем, что ошибки могут «накапливаться». Поэтому необходимо познакомиться с приемами оценки точности результата вычислений.

Если вместо точного значения α мы выберем приближенное значение a, то разность

$$\Delta a = \alpha - a$$

называется *ошибкой* приближенного значения a. Часто бывает интереснее знать *относительную ошибку*

$$\omega_a = \frac{\Delta a}{a}.$$

Абсолютная величина

$$|\Delta a|$$

называется *абсолютной ошибкой*.

Пусть a и b — приближенные значения для α и β. Естественно принять

$$a + b, \quad a - b, \quad ab, \quad \frac{a}{b}$$

за приближенные значения чисел

$$\alpha+\beta, \quad \alpha-\beta, \quad \alpha\beta, \quad \frac{\alpha}{\beta}.$$

Простые выкладки показывают, что

$$\Delta(a+b)=\Delta a+\Delta b, \tag{1}$$

$$\Delta(a-b)=\Delta a-\Delta b, \tag{2}$$

$$\Delta(ab)=b\cdot\Delta a+a\cdot\Delta b+\Delta a\cdot\Delta b, \tag{3}$$

$$\Delta\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{b\cdot\Delta a-a\cdot\Delta b}{b(b+\Delta b)}. \tag{4}$$

Так как ошибки Δa и Δb обычно малы по сравнению с самими a и b, то *приближенно* формулы (3) и (4) заменяют формулами

$$\Delta(ab)\approx b\cdot\Delta a+a\cdot\Delta b, \tag{3'}$$

$$\Delta\left(\frac{a}{b}\right)\approx\frac{b\cdot\Delta a-a\cdot\Delta b}{b^2}. \tag{4'}$$

Формулы (3′) и (4′) принимают более простой вид при переходе к относительным ошибкам:

$$\omega_{ab}\approx\omega_a+\omega_b, \tag{3''}$$

$$\omega_{a/b}\approx\omega_a-\omega_b. \tag{4''}$$

Переходя к абсолютным величинам, получаем

$$|\Delta(a\pm b)|\leqslant|\Delta a|+|\Delta b|,$$

$$|\omega_{ab}|\leqslant|\omega_a|+|\omega_b|,$$

$$|\omega_{a/b}|\leqslant|\omega_a|+|\omega_b|.$$

Именно эти самые простые формулы наиболее важны для понимания того, как надо планировать вычисления.

Например, если мы хотим вычислить сумму восьми слагаемых с ошибкой не более 0,0001, то каждое слагаемое нам надо знать с точностью, лишь немного меньшей чем 0,00001. Если слагаемые даны с семью знаками после запятой, то можно спокойно сохранить пять знаков. Если же сами данные лишь приближенны и могут иметь ошибки до 0,00001, то, добавляя еще ошибки округления до пятого знака, которые в каждом слагаемом не более 0,000005, мы рискуем в сумме получить ошибку вплоть до

$$8\,(0{,}00001+0{,}000005)=0{,}00012.$$

Чтобы вполне уверенно получить ошибку не больше 0,0001, округление каждого слагаемого надо производить лишь до шестого знака.

При умножении и делении, как мы видели, складываются не сами ошибки, а относительные ошибки. Поэтому для общей ориентировки в точности таких вычислений и их планировании подсчитывают не число знаков «после запятой», а «число значащих цифр». Например, числа

$$0{,}00345678;\ 1{,}003474;\ 5\,671\,238\,912,$$

округленные до «четырех значащих цифр», имеют вид

$$0{,}003456 = 3{,}456\cdot 10^{-3};\quad 1{,}003;\quad 5\,671\,000\,000 = 5{,}671\cdot 10^{9}.$$

Подробности лучше усваиваются на практике, и здесь мы их излагать не будем, тем более, что оценки по приведенным выше формулам дают для возможных предельных размеров ошибок обычно значения значительно бо́льшие, чем реально возникающие при приближенных вычислениях ошибок. О причинах такого положения вещей вы узнаете из курса теории вероятностей. Заметим лишь, что при округлении в лучшую сторону «до n значащих цифр» относительная ошибка не превосходит $5\cdot 10^{-n}$.

5.6. Приближенные вычисления. Метод границ

При желании вести приближенные вычисления с вполне надежной оценкой их точности часто целесообразно следовать *методу границ*, т. е. на каждом шаге вычислять оценку результата сверху и снизу.

При сложении и вычитании пользуются тем, что из

$$a \leqslant \alpha \leqslant a',\quad b \leqslant \beta \leqslant b'$$

вытекает

$$a + b \leqslant \alpha + \beta \leqslant a' + b',\ a - b' \leqslant \alpha - \beta \leqslant a' - b.$$

При умножении и делении основываются на том, что при положительных a и b из

$$a \leqslant \alpha \leqslant a',\ b \leqslant \beta \leqslant b'$$

вытекает

$$ab \leqslant \alpha\beta \leqslant a'b',\quad \frac{a}{b'} \leqslant \frac{\alpha}{\beta} \leqslant \frac{a'}{b}\quad (b, b' > 0).$$

Округление нижней границы производится только вниз, а верхней границы — только вверх,

5.7. Извлечение квадратных корней

Арифметический квадратный корень $\sqrt{a}$ из положительного числа a есть положительное число. Оно возрастает с возрастанием a. Поэтому, если в четырехзначной таблице стоит

$$\sqrt{3{,}10} \approx 1{,}7608; \quad \sqrt{3{,}11} \approx 1{,}7635,$$

то не только можно быть уверенным (по сказанному выше), что

$$\sqrt{3{,}10} \geqslant 1{,}76075, \text{ а } \sqrt{3{,}11} \leqslant 1{,}76355,$$

но и в том, что, например *),

$$1{,}76075 \leqslant \sqrt{3{,}102} \leqslant 1{,}76355.$$

Школьный способ извлечения квадратных корней без таблиц утомителен. Сейчас будет рассказано о другом очень древнем (чуть ли не из Древнего Египта) способе последовательного уточнения уже найденного приближенного значения квадратного корня, который нам интересен тем, что доставляет на каждом шаге оценки снизу и сверху.

Возьмем какое-либо приближение к $\sqrt{a}$ *по избытку*

$$y_0 \geqslant \sqrt{a}.$$

Ясно, что

$$x_0 = \frac{a}{y_0}$$

будет приближением *по недостатку*, то есть

$$x_0 \leqslant \sqrt{a}.$$

Введем

$$y_1 = \frac{x_0 + y_0}{2}, \quad x_1 = \frac{a}{y_1}.$$

Так как **)

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(y_0 + \frac{a}{y_0}\right) = \frac{\sqrt{a}}{2}\left(\frac{y_0}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{y_0}\right) \geqslant \frac{\sqrt{a}}{2} \cdot 2 = \sqrt{a},$$

---

*) Об «интерполяции» табличных данных, дающей более точный результат, мы сейчас говорить не будем, так как строгое ее обоснование сейчас было бы затруднительно.

**) Для любого $\xi > 0$, $\xi + \frac{1}{\xi} \geqslant 2$ (докажите!).

то y_1 вновь будет приближением по избытку, а x_1 — по недостатку. Поступая так и далее, получаем последовательно приближения по недостатку

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

и приближения по избытку

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n,\ \ldots$$

по «рекуррентным формулам»

$$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \quad x_{n+1} = \frac{a}{y_{n+1}}.$$

Докажите самостоятельно, что *)

$$x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant \ldots, \tag{1}$$

$$y_0 \geqslant y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_n \geqslant \ldots \tag{2}$$

Позднее мы докажем, что обе эти числовые последовательности «сходятся» к $\sqrt{a}$. Сейчас вы должны просто убедиться, что разность

$$y_n - x_n$$

очень быстро становится крайне малой, особенно если уже начальное приближение было выбрано достаточно хорошим. Например, взяв для вычисления $\sqrt{3{,}102}$ начальное приближение

$$x_0 = 1{,}70,$$

получим **)

$$y_0 \leqslant 1{,}825;$$

$$x_1 \geqslant 1{,}760; \qquad y_1 \leqslant 1{,}763;$$

$$x_2 \geqslant 1{,}7612492; \quad y_2 \leqslant 1{,}7612500,$$

т. е. $1{,}7612492 \leqslant \sqrt{3{,}102} \leqslant 1{,}7612500$.

5.8. Число π

Число π равно *длине окружности единичного диаметра*. Архимед доказал, что

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

---

*) Если $y_0 = x_0 = \sqrt{a}$, то $y_n = x_n = \sqrt{a}$; если же $y_0 > \sqrt{a}$, то последовательность (1) — строго возрастающая, а последовательность (2) — строго убывающая.

**) При выполнении вычислений следует всюду производить округления в соответствии с правилами п. 5.6.

Покажем, как можно прийти к этому результату и вычислить π с еще большей точностью.

Обозначим через a_n длину стороны вписанного в окружность единичного диаметра правильного n-угольника и через b_n длину стороны описанного вокруг той же окружности правильного n-угольника; $p_n = n \cdot a_n$ и $q_n = n \cdot b_n$ — соответствующие периметры. Из геометрии известно (рис. 35):

$$p_n < \pi < q_n, \qquad (1)$$

$$a_6 = \frac{1}{2}, \qquad (2)$$

$$b_4 = 1, \qquad (3)$$

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{1 - a_n^2}, \qquad (4)$$

$$a_{2n} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - a_n^2}}. \qquad (5)$$

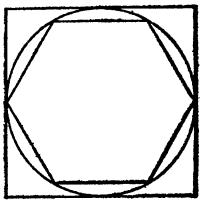


Рис. 35

Из (1) и (3) вытекает, что

$$p_n < \pi < 4, \quad a_n < \frac{4}{n}.$$

Поэтому формула (4) позволяет заранее оценить, каким надо взять n, чтобы оценка (1) доставляла нам π с требуемой точностью. Для того чтобы получить неравенства Архимеда, достаточно аккуратно вычислить периметры вписанного и описанного 96-угольников. Заметьте, что при этом приходится находить квадратные корни с точностью, превышающей точность четырехзначных таблиц, а все округления производить в соответствии с указаниями п. 5.6. Естественно, что p_n достаточно оценивать *по недостатку*, а q_n — *по избытку*.

5.9. Числовая прямая и числовая плоскость

В п. 5.3 было рассказано, как устанавливается *взаимно однозначное* соответствие между действительными числами и точками прямой. Оно позволяет применять к числам геометрический язык. Например, множество чисел x, удовлетворяющих двойному неравенству

$$a \leqslant x \leqslant b,$$

называется *отрезком* числовой прямой. Проще всего узаконить полностью такой геометрический язык, объявив

сами числа *точками*, а множество всех этих «точек» — *прямой*. Для отличия от прямых в смысле чистой геометрии говорят, что множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел есть *числовая прямая*. *Расстоянием* между точками числовой прямой x и y (т. е. числами x и y) называется число

$$\rho(x, y) = |x - y|.$$

При таком понимании дела существует *только одна* числовая прямая. Различные же прямые, на которых выбраны точки O и E и введены координаты

$$x = \frac{OX}{OE},$$

должны получить другое название. Будем их называть *координатными прямыми*.

Аналогичным образом множество $\mathbb{R}^2$ всех пар действительных чисел (x, y) будем называть *числовой плоскостью*. Тогда законно, например, множество пар чисел (x, y), удовлетворяющих уравнению

$$x^2 + y^2 = 1,$$

называть *окружностью* с центром в точке $O = (0, 0)$ и радиусом $r = 1$ на числовой плоскости.

Различные же плоскости, на которых различным образом выбраны оси координат и масштаб измерения, будем называть *координатными плоскостями*.

К такому геометрическому языку вы привыкнете в курсе алгебры. Заметьте, что при нашем подходе к делу введение координат на обычной геометрической плоскости состоит в том, что точки этой плоскости определенным образом отображаются в точки числовой плоскости:

$$M \to (x_M, y_M).$$

Обратное отображение можно записать в виде

$$(x, y) \to M(x, y).$$

5.10. Общее понимание термина «график функции»

Ясно, как теперь мы должны понимать выражение «график» в применении к числовой функции числового переменного: это просто *множество*

$$\Gamma_f = \{(x, y): y = f(x)\} \qquad (1)$$

всех пар чисел таких, что функция f определена в точке x и принимает в этой точке значение y.

Естественно, что график числовой функции числового аргумента есть подмножество числовой плоскости $\mathbb{R}^2$, «фигура» на этой плоскости.

Но определение графика (1) имеет совершенно общий характер, оно применено к функциям, заданным на произвольном множестве и со значениями произвольной природы.

Для любых двух множеств M и N множество всех пар (x, y), где x принадлежит M, а y принадлежит N, называется *произведением* множеств M и N и обозначается

$$M \times N.$$

Произведение множества M на себя обозначается M^2, что и объясняет обозначение $\mathbb{R}^2$ для числовой плоскости.

Если для функции f область определения является подмножеством множества M, а множество значений является подмножеством множества N, то график Γ_f есть подмножество произведения $M \times N$. Самый обычный график дежурств отражает эту идею.

5.11. Функции нескольких переменных и пространство $\mathbb{R}^n$

Выражение

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1}$$

принимает вполне определенное значение z для каждой пары чисел (x, y). С абстрактной точки зрения можно сказать, что формула (1) определяет *функцию от пары чисел* (x, y). Но более принято говорить в подобных случаях о *функциях двух переменных.*

Графиком функции двух переменных $f(x, y)$ называют множество троек (x, y, z), для которых выполняется равенство

$$z = f(x, y).$$

Множество числовых троек называется *трехмерным числовым пространством.* В нем график функции (1) является конусом (рис. 36). График функции

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

есть верхняя половина сферы (рис. 37).

Ясно, что с точки зрения нужд алгебры и анализа столь же просто и естественно назвать множество всех числовых «энок»

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

n-мерным числовым пространством. Функции n переменных имеют графики в $(n+1)$-мерном пространстве. Со временем все это покажется вам не слишком сложным.

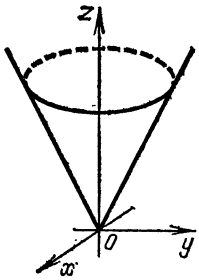


Рис. 36

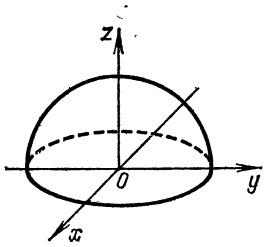


Рис. 37

Геометрия n-мерного пространства позволяет пользоваться геометрическим языком при изучении систем уравнений и неравенств с n неизвестными. С удобством такого способа мышления вы встретитесь в курсе алгебры. Быть может, несколько неожиданным вам покажется то обстоятельство, что особенно часто геометрический язык многомерных пространств сейчас употребляется специалистами по математическим методам экономических расчетов.

5.12. Принцип математической индукции

Рассмотрим предложение $P(n)$:

«*число* $n^2 - n + 41$ — *простое*».

Подставив вместо переменной n в этом предложении $n = 3$, получим высказывание *)

«$3^2 - 3 + 41$ — *простое число*».

Число $3^2 - 3 + 41 = 47$ в самом деле простое. Значит, высказывание $P(3)$ верно. Проверка показывает, что

*) См. о *предложениях* и *высказываниях* п. 7 раздела II «О языке математических знаков».

высказывания

$$P(1),\ P(2),\ P(3),\ P(4),\ P(5),\ \ldots$$

все подряд верны вплоть до $P(40)$ включительно. Возникает гипотеза, что $P(n)$ верно для л ю б о г о натурального n. Эту гипотезу можно символически записать так:

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ P(n). \qquad (1)$$

Здесь $\mathbb{N}$ — обозначение для множества натуральных чисел, а знак $\forall$ читается «для всех».

Гипотеза, однако, неверна. Число

$$41^2 - 41 + 41 = 1681$$

делится на 41, и, следовательно, $P(41)$ *ложно*, а следовательно, ложно и общее высказывание (1).

В виде второго примера рассмотрим предложение $E(n)$:

«число $n^3 + 5n$ делится без остатка на число шесть».

Верно ли высказывание

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ E(n)?$$

Можно начать проверку такой гипотезы:

$$1^3 + 5\cdot 1 = 6,$$
$$2^3 + 5\cdot 2 = 18 = 3\cdot 6,$$
$$3^3 + 5\cdot 3 = 42 = 7\cdot 6,$$
$$4^3 + 5\cdot 4 = 84 = 14\cdot 6\ \ldots$$

Пока гипотеза оправдывается. Но ясно, что довести до конца такую проверку нельзя: множество возможных значений n б е с к о н е ч н о!

Важный способ доказательства общих высказываний о свойствах натуральных чисел доставляет *метод математической индукции*. Он основан на такой аксиоме:

А к с и о м а п о л н о й и н д у к ц и и *). *Если предложение $P(n)$, содержащее натуральную переменную n, верно при $n = 1$ и если для любого натурального n из истинности $P(n)$ вытекает истинность $P(n+1)$, то $P(n)$ верно при любом натуральном n.*

---

*) Здесь не место говорить о том, что такое вообще «индукция» и как относится математическая «полная индукция» к другим видам индукции. Но вам настоятельно рекомендуется поинтересоваться этим.

Символически аксиому полной индукции можно записать так:

$$\left.\begin{array}{r} P(1) \\ \forall n\,(P(n) \Rightarrow P(n+1)) \end{array}\right\} \Rightarrow \forall n\, P(n).$$

Мы опустили в записи знаки $\in \mathbb{N}$. Так поступают часто, если все время имеют дело с переменными, имеющими одну и ту же область возможных значений.

Заметьте, что высказывания

$$\forall n\, P(n) \text{ и } \forall k\, P(k)$$

имеют один и тот же смысл. Говорят, что *квантор общности* $\forall$ производит «свертывание» по стоящей следом за ним переменной. В результате получается предложение, смысл которого не зависит от того, как обозначена эта переменная. Поэтому законна и такая запись аксиомы полной индукции:

$$\left.\begin{array}{r} P(1) \\ \forall k\,(P(k) \Rightarrow P(k+1)) \end{array}\right\} \Rightarrow \forall n\, P(n).$$

Некоторые авторы школьных учебников находят такую запись более удобной.

На первый взгляд кажется, что эту аксиому полной индукции легко доказать. В самом деле, если верно $P(1)$, то должно быть верно $P(1+1) = P(2)$; если верно $P(2)$, то верно и $P(2+1) = P(3)$, и так далее для любого натурального n. Несмотря на психологическую убедительность, это рассуждение неверно (хотя его, к сожалению, можно найти в некоторых учебниках). Дело в том, что в том месте, где говорится «*и так далее для любого n*», допускается ошибка, приводящая к порочному кругу: чтобы доказать, что действительно «*так далее*» можно дойти до любого n, следует применить... аксиому полной индукции, которую мы и желаем доказать! Приведенное выше рассуждение можно использовать для того, чтобы из условий *аксиомы индукции* вывести истинность, скажем, $P(17)$ или $P(28)$ (для этого нужно сделать цепочку из 17 (соответственно 28) логических шагов; однако, не приняв на веру саму аксиому индукции, нельзя из условий истинности $P(1)$ и следования $P(n+1)$ из $P(n)$ сделать заключение о справедливости $P(n)$ при всех n.

Доказательство по методу математической индукции состоит из «*начала индукции*», «*индуктивного шага*» и «*заключения*»:

1) *начало индукции* — доказательство $P(1)$;

2) *индуктивный шаг* — доказательство, что из $P(n)$ вытекает $P(n+1)$;

3) *заключение* — всегда верно $P(n)$.

Докажем по этой схеме, что $n^3 + 5n$ *делится на шесть, каково бы ни было натуральное* n.

1) Начало индукции:

$$1^3 + 5 \cdot 1 = 6 \text{ делится на } 6.$$

2) Индуктивный шаг состоит в том, чтобы из

$$n^3 + 5n = 6p,$$

где p — целое число, вывести, что

$$(n+1)^3 + 5(n+1) = 6q,$$

где q — целое число. Доказательство очень просто:

$$(n+1)^3 + 5(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5 =$$
$$= (n^3 + 5n) + 3n(n+1) + 6 = 6\left(p + \frac{n(n+1)}{2} + 1\right) = 6q.$$

Так как $n(n+1)$ четно, q — целое.

3) Заключение — при любом натуральном n число $n^3 + 5n$ делится на шесть.

5.13. Числовые последовательности

С конечными числовыми последовательностями мы, по существу, уже имели дело в п. 5.11, говоря об «энках» чисел

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

n расположенных друг за другом чисел называют также *числовой последовательностью длины* n. В частности, упорядоченные пары чисел можно считать последовательностями длины два.

Представляется естественным от таких *конечных* числовых последовательностей перейти к *бесконечным* последовательностям. Таковы последовательности выписанных в порядке возрастания натуральных чисел

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\},$$

простых чисел

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}.$$

Выписывая в порядке возрастания показателя n числа $(-1)^n$, получаем бесконечную последовательность, состоящую только из чисел $+1$ и -1:

$$\{+1, -1, +1, -1, \ldots\}.$$

Однако такой наивный подход к делу в случае бесконечных последовательностей не вполне удовлетворителен. Ведь фактически выписать члены бесконечной последовательности нельзя.

Ясно, что задать бесконечную числовую последовательность — это значит указать правило, по которому по натуральному числу n (номеру) находится *«энный член последовательности»* a_n:

$$1 \to a_1,\ 2 \to a_2, \ldots, n \to a_n, \ldots$$

Мы знаем, что правило, согласно которому каждому элементу x множества M ставится в соответствие определенный объект $f(x)$, определяет заданную на множестве M функцию $f(x)$. Потому можно принять такое определение:

Определение 1. *Бесконечной числовой последовательностью называется числовая функция $f(n)$, определенная на множестве всех натуральных чисел*

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

В ближайшее время мы будем заниматься по преимуществу бесконечными последовательностями. Поэтому прилагательное *«бесконечная»* мы будем опускать. Говоря просто «последовательность», будем иметь в виду бесконечную последовательность. Если же зайдет речь о конечных последовательностях, будем непременно это оговаривать.

Обозначение $f(n)$ для энного члена последовательности, однако, не принято. Вместо этого пишут f_n. Имея дело с несколькими последовательностями, для каждой из них выбирают особую букву. Например, энные члены трех последовательностей можно обозначить соответственно x_n, y_n, z_n. Сами последовательности

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots),$$
$$(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots),$$
$$(z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n, \ldots)$$

коротко обозначают (x_n), (y_n), (z_n).

Последовательность, у которой все члены совпадают, называется *постоянной последовательностью* или просто

постоянной. Последовательность может быть задана аналитически при помощи формулы, указывающей, как по номеру n вычислить член последовательности x_n с этим номером. Например,

$$x_n = \frac{n-1}{n+1}, \quad x_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad x_n = 5.$$

Логическое определение последовательности может и не быть выражено формулой. Чтобы последовательность была определена, важно только, что для каждого натурального n было указано *характеристическое* свойство числа x_n, позволяющее отличить его от любого другого.

Например:

p_n есть n-е по порядку простое число:

$$p_1 = 2, \ p_2 = 3, \ p_3 = 5, \ p_4 = 7, \ \ldots$$

Найти p_{1000} или $p_{1\,000\,000}$ нелегко, но теоретически возможно. Это пример *логического* определения последовательности, которое трудно заменить явной формулой.

Часто применяют *индуктивный* способ определения последовательности, который называют иначе *рекуррентным*.

Пусть, например,

$$x_1 = 1, \text{ и при любом } n > 1 \ x_n = n \cdot x_{n-1}.$$

Ясно, что эти условия определяют значения x_n для любого натурального n, т. е. задают бесконечную последовательность:

$$x_1 = 1, \ x_2 = 2, \ x_3 = 6, \ x_4 = 24, \ x_5 = 120, \ \ldots$$

Понятно, что это хорошо известная нам последовательность

$$x_n = n!$$

Рассмотрим еще один пример:

$$a_1 = 1, \ a_2 = 1, \ a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \ n \geqslant 3.$$

Выпишем первые члены этой последовательности: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, . . . Эта последовательность имеет ряд интересных свойств, ее члены называются *числами Фибоначчи*.

З а д а ч а. Докажите методом математической индукции следующие тождества, связывающие между собой числа Фибоначчи:

а) $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_{n+2} - 1$;
б) $a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1} = a_{2n}$;
в) $a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n} = a_{2n+1} - 1$;
г) $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = a_n a_{n+1}$.

Определение 2. *Последовательность* (x_n) *называется убывающей, если для ее членов выполняется неравенство*

$$x_{n+1} < x_n$$

для всех n, *иными словами, если*

$$x_1 > x_2 > x_3 > \ldots > x_n > \ldots$$

Если же для всех n $x_n \leqslant x_{n-1}$, *т. е. если* $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant \ldots$, *то последовательность называется невозрастающей.*

Ясно, что понятие невозрастающей последовательности шире, чем понятие убывающей.

Определение 3. *Последовательность* (x_n) *называется возрастающей, если для ее членов выполняется неравенство*

$$x_n < x_{n+1}$$

для всех n, *т. е. если*

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < \ldots$$

Если же для всех n $x_n \leqslant x_{n+1}$, то последовательность (x_n) называется *неубывающей.*

Убывающие, неубывающие, возрастающие, невозрастающие последовательности объединяются под общим названием *монотонные последовательности.*

Замечание. Из определения возрастающей последовательности следует, что для установления возрастания достаточно установить неравенство

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1, \quad n = 1, 2, \ldots \quad (x_i > 0).$$

Аналогичное замечание можно сделать и для убывающей последовательности.

Рассмотрим последовательность

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Найдем приближенно первые члены этой последовательности: $x_1 = 2$, $x_2 = 2{,}25$; $x_3 = 64/27 \approx 2{,}37$. Возникает гипотеза, что последовательность *возрастает.*

Докажем это:

$$x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1};$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}=$$

$$=\left(\frac{(n+2)\,n}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}=\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}.$$

Применив к $\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}$ неравенство Бернулли (если $h>-1$ и $h\neq 0$, то $(1+h)^n>1+nh$ при любом натуральном n; докажите это сами), получим

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}>\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\frac{n+1}{n}=1,$$

а следовательно, $x_{n+1}>x_n$ для всех n, что и требовалось установить.

З а д а ч а. Докажите, что последовательность с общим членом $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ убывает.

О п р е д е л е н и е 4. *Последовательность (x_n) называется ограниченной сверху, если существует такое число M, что при любом натуральном n выполняется неравенство*

$$x_n\leqslant M.$$

О п р е д е л е н и е 5. *Последовательность (x_n) называется ограниченной снизу, если существует такое число m, что для всех ее членов выполняется неравенство $x_n\geqslant m$.*

О п р е д е л е н и е 6. *Последовательность называется ограниченной, если она ограничена сверху и снизу, т. е. если существуют такие два числа M и m, что для всех членов последовательности выполнены неравенства*

$$m\leqslant x_n\leqslant M.$$

Легко доказать, что для ограниченности последовательности необходимо и достаточно существование такого числа M, что для любого члена последовательности выполнено неравенство $|x_n|<M$ (проведите доказательство самостоятельно).

Докажем, например, что *последовательность $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ограничена сверху.* Учитывая, что после-

довательность $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ убывает, получим, что

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} =$$
$$= y_n < y_{n-1} < y_{n-2} < \ldots < y_2 < y_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^2 = 4,$$

а это значит, что $x_n < 4$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ Заметим, что $0 < x_n$, следовательно, $0 < x_n < 4$, а значит, последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ограничена.

5.14. Прогрессии

Определение 1. *Последовательность, определяемая первым членом a_1 и рекуррентным соотношением*

$$a_{n+1} = a_n + d,$$

где d — некоторое число, называется арифметической прогрессией, а d называется разностью прогрессии.

В этом случае индуктивное определение удается заменить простой формулой $a_n = a_1 + d(n - 1)$ (проведите доказательство сами).

По нашему определению, арифметическая прогрессия есть бесконечная числовая последовательность. Конечная последовательность ее первых n членов

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$$

называется *конечной арифметической прогрессией.* Для такой конечной прогрессии легко находится сумма S ее членов. Легко доказать, что в конечной арифметической прогрессии *сумма равноотстоящих от начала и конца членов постоянна* (докажите!). Запишем интересующую нас сумму S двумя способами:

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$
$$S = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1.$$

Сложив почленно эти равенства, получим

$$2S = n(a_1 + a_n) = n(2a_1 + (n - 1)d).$$

Для бесконечной арифметической прогрессии полученный результат формулируется так: *сумма первых n членов арифметической прогрессии может быть выражена*

так:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n; \qquad (1)$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n. \qquad (2)$$

Заметим еще одно свойство членов арифметической прогрессии. Если a_{n-m}, a_n, a_{n+m} — члены арифметической прогрессии, то верно следующее равенство:

$$a_n = \frac{a_{n-m} + a_{n+m}}{2} \quad \text{(докажите!)}.$$

Определение 2. *Последовательность, определяемая первым членом a_1 и рекуррентным соотношением*

$$a_n = a_{n-1}q, \; n > 1,$$

где q — некоторое число, называется геометрической прогрессией, а q — знаменателем геометрической прогрессии.

Явная формула общего ее члена имеет вид

$$a_n = a_1 q^{n-1} \quad \text{(докажите!)}.$$

Для вывода формулы суммы

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

первых n членов геометрической прогрессии рассмотрим выражение $S_n q$:

$$S_n q = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots + a_1 q^n.$$

Найдем $S_n - S_n q$, получим: $S_n - S_n q = a_1 - a_1 q^n$, откуда

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}. \qquad (3)$$

Формула (3) не действует при $q = 1$, но в этом случае

$$S_n = n a_1. \qquad (4)$$

5.15. Понятие о пределе последовательности

Рассмотрим фигуру, составленную из бесконечной последовательности квадратов (рис. 38). Первый квадрат имеет площадь 1, второй — 1/4, третий — 1/16 и т. д. Так как вся фигура помещается в треугольнике площади 2, то представляется естественным думать,

что площадь нашей фигуры меньше двух *). Естественно попробовать ее найти, подсчитав «бесконечную сумму»

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{256}+\frac{1}{1024}+\ldots$$

Но имеет ли такой подход к делу достаточно определенный смысл? Ответ на этот вопрос по существу положительный. Но для того чтобы вычислить нашу сумму, надо понять, что разумно понимать под названием «суммы бесконечного числа слагаемых». Потом придется ввести соответствующее определение. Но сначала надо разобраться неформальным образом в том, что мы собственно хотим получить. Последовательность наших слагаемых

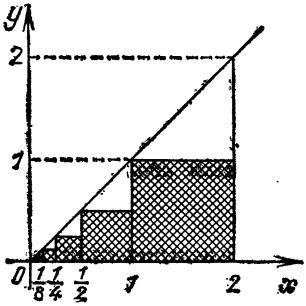


Рис. 38

$$a_1=1,\quad a_2=\frac{1}{4},\ldots,\quad a_n=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1},\ldots$$

образует геометрическую прогрессию. Для суммы первых n слагаемых мы уже имеем готовую формулу (3) из п. 5.14. У нас $a_1=1$ и $q=1/4$. Поэтому

$$S_n=\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right).$$

Ясно, что

$$S_1<S_2<\ldots<S_n<S_{n+1}<\ldots$$

Но легко заметить, что при любом n

$$S_n<\frac{4}{3}.$$

---

*) На практике площади выражают в квадратных сантиметрах, метрах, километрах. Сказать, что площадь комнаты равна 15, не указав единицы измерения, бессмысленно. Но на числовой плоскости естественной единицей измерения площадей является площадь квадрата с вершинами (0,0), (1,0), (1,1), (0,1). Площади, получающиеся при такой единице измерения, выражают просто отвлеченными числами. Такова, например, наша площадь треугольника с вершинами (0,0), (0,2), (2,2), равная двум.

Поэтому, например, все суммы S_n с $n > 11$ заключены в пределах

$$\frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{4^{11}}\right) < S_n < \frac{4}{3},$$

т. е., во всяком случае, в пределах

$$\frac{4}{3} - 0{,}000001 < S_n < \frac{4}{3}.$$

Все они отличаются от

$$S = \frac{4}{3}$$

не более чем на 0,000001.

Более того, каково бы ни было положительное число ε, можно найти такой номер N, что при $n > N$

$$|S_n - S| < \varepsilon.$$

Например, для $\varepsilon = 10^{-20}$ достаточно взять $N = 50$.

Говорят, что «*при n, стремящемся к бесконечности, S_n стремится к $S = 4/3$*, или что *число S есть предел последовательности*

$$(S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots).$$

Предел сумм

$$S_1 = a_1,$$
$$S_2 = a_1 + a_2,$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

возрастающего числа членов последовательности (a_n) называется *суммой всех членов этой последовательности*. В соответствии с этим определением

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \ldots = \frac{4}{3}.$$

Это и есть площадь нашей фигуры *).

---

*) Серьезно площадями мы займемся только в десятом классе. Там будет дано точное определение площади, из которого можно будет вывести сформулированное сейчас утверждение. Полученный результат, что площадь нашей фигуры равна 4/3, допускает еще такое наглядное объяснение. По чертежу видно, что наше фигура превращается в треугольник площади 2, если каждый из составляющих ее квадратов дополнить треугольником вдвое меньшей площади. Поэтому $S + {}^1/_2 S = 2$, и, значит, $S = 4/3$.

Рассмотрим еще последовательность с общим членом

$$x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Изобразим члены этой последовательности точками прямой (рис. 39, *а*). Наглядно ясно, что точки x_n «*стремятся*

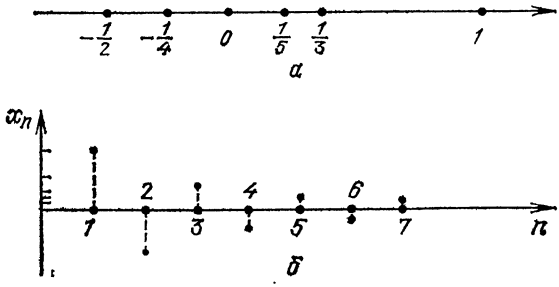


Рис. 39

к точке $x = 0$». Говорят, что предел последовательности x_n есть число 0, и пишут

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0.$$

Так как x_n есть функция числа n, определенная только на множестве натуральных чисел, то ее график состоит из отдельных точек (рис. 39, *б*).

На этом графике тоже видно, что точки графика постепенно приближаются к горизонтальной прямой $y = 0$.

Определение. *Число a называется пределом последовательности (x_n), если для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число N, что при $n \geqslant N$ выполняется неравенство*

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Если a есть предел последовательности (x_n), то пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Рассмотрим график последовательности

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Мы доказали, что эта последовательность является *возрастающей* и *ограниченной*. Кажется ясным, что точки x_n

на оси ординат «сходятся» к какому-то пределу $x < 4$ (рис. 40). Это ожидание верно и вытекает из такого общего положения:

Признак сходимости Вейерштрасса. *Если последовательность ограничена и монотонна, то она имеет предел.*

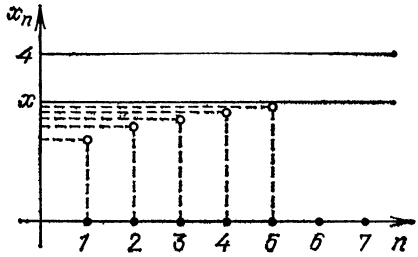


Рис. 40

Доказательство этого утверждения мы сможем дать, лишь обстоятельно познакомившись с теорией действительных чисел. При «аксиоматическом» подходе к понятию действительного числа этот признак сходимости иногда принимают в качестве одной из аксиом. Предел

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

играет важную роль в самых различных задачах.

Можно доказать (попробуйте!), что для любой последовательности (x_n), имеющей предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$,

$$\forall n\,(x_n \leqslant a) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n \leqslant a.$$

В частности, отсюда получается, что при любом n

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Покажите, что

$$2{,}7 < e < 2{,}8.$$

Заметим, впрочем, что для приближенного вычисления числа e этот путь не слишком удобен. Позднее мы узнаем, как без больших усилий получить очень точные оценки числа e, например оценку

$$2{,}718281828 < e < 2{,}718281829.$$

5.16. Сумма бесконечной геометрической прогрессии

В соответствии с рассказанным ранее суммой

$$S = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^n + \ldots$$

геометрической прогрессии (a_1q^n) называется предел

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(a_1\frac{1-q^n}{1-q}\right).$$

Относительно этого предела важно знать следующее:
1) *если* $|q| < 1$, *то он существует и равен*

$$S = \frac{a_1}{1-q}; \qquad (1)$$

2) *если* $|q| \geqslant 1$, *то он не существует.*

Вы можете доказать оба эти утверждения. Заметьте, что почти всегда для получения конкретных результатов из определения предела приходится пользоваться таким фактом:

для любого положительного ε *существует такое натуральное* n, *что*

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Справедливость этого последнего утверждения, по существу, тоже требует обоснования, что и делается в теории действительных чисел.

Заметьте еще, что основную формулу суммы геометрической прогрессии (1) можно вывести совсем просто, если не затруднять себя вопросом о точном определении смысла самого понятия «сумма бесконечного числа слагаемых». В самом деле:

$$S = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots = a_1 + q(a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots) = a_1 + qS.$$

Решая уравнение

$$S = a_1 + qS,$$

получаем

$$S = \frac{a_1}{1-q}.$$

В XVIII веке Эйлер получал таким образом равенства типа

$$1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \ldots = \frac{1}{1-2} = -1$$

Следовать этому образцу мы не будем, но не слишком бойтесь иногда и двигаться, доверяясь наглядным соображениям, без строгого логического обоснования.

6. ГЕОМЕТРИЯ И КИНЕМАТИКА НА ПЛОСКОСТИ

6.1. Плоскость как метрическое пространство

Систематический курс геометрии «евклидовой» плоскости можно строить по-разному. Сейчас мы познакомимся с одним таким способом, который позволяет очень быстро получить ответ на вопрос «*Что такое евклидова плоскость*?», если владеть некоторыми начатками логики и теории действительных чисел. Сначала мы будем рассуждать, опираясь на уже имеющиеся у вас геометрические знания, но потом, показав естественность предлагаемого определения понятия «*евклидова плоскость*», покажем, как на его основе в принципе можно было бы построить заново всю ту планиметрию, которую вы ранее изучали.

Геометрические фигуры мы будем считать *множествами точек*. Например, окружность с центром O и радиусом r *есть множество всех точек плоскости, расстояние которых от точки O равно r*. В планиметрии изучают свойства фигур, расположенных на какой-либо одной плоскости; говоря далее о точках, мы будем иметь в виду точки этой плоскости. Будем считать выбранной *единицу измерения* длины e. Тогда расстояние r между любыми двумя точками плоскости P и Q выражается в виде

$$r = \rho e,$$

где ρ есть неотрицательное действительное число. Мы будем далее называть *расстоянием* между точками P и Q просто само это число ρ, обозначая его

$$\rho\,(P, Q).$$

Расстояния между точками плоскости обладают следующими свойствами:

1) $\rho\,(P, Q) \geqslant 0$, причем $\rho\,(P, Q) = 0$ в том и только том случае, когда $P = Q$;

2) $\rho\,(P, Q) = \rho\,(Q, P)$;

3) $\rho\,(P, Q) + \rho\,(Q, R) \geqslant \rho\,(P, R)$.

Любое множество M вместе с определенной на $M^2 = M \times M$ функцией $\rho(P, Q)$, обладающей свойствами 1 — 3, называется метрическим пространством.

Поскольку эти свойства имеются у расстояний между точками плоскости, возникает желание искать окончательное определение евклидовой плоскости как специального вида метрическое пространство.

Вы знаете, что на плоскости можно ввести прямоугольную систему координат, что позволяет записать расстояние между точками P и Q в виде

$$\rho(P, Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2},$$

где x_P и y_P — координаты точки P, а x_Q и y_Q — координаты точки Q. Но

$$\rho = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

есть расстояние между точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2) числовой плоскости. Значит: *при отображении*

$$P \mapsto (x_P, y_P)$$

взятой нами «геометрической» плоскости на числовую плоскость расстояние $\rho(P, Q)$ равно расстоянию между образами точек P и Q на числовой плоскости.

Теперь мы достаточно подготовлены, чтобы понять предлагаемое далее определение «евклидовой плоскости».

Определение 1. *Метрическое пространство $(\mathbb{R}^2, r)$, где*

$$r((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

называется числовой евклидовой плоскостью.

Заметьте, что каждое метрическое пространство состоит из:

а) множество его «точек» M;

б) заданного на M^2 «расстояния» ρ.

Говоря об «отображении» одного метрического пространства на другое, мы будем иметь в виду отображение одного на другое их множеств точек (их «носителей»).

Определение 2. *Метрическое пространство называется евклидовой плоскостью, если его можно отобразить на числовую евклидову плоскость с сохранением расстояний между точками.*

Чтобы построить на этой основе геометрию евклидовой плоскости, надо определить все обычные геометрические понятия через понятия *точка* и *расстояние между*

точками. Выше был приведен пример такого определения окружности. Убедитесь в правильности такого определения отрезка:

$$[A, B] = \{X: \rho(A, X) + \rho(X, B) = \rho(A, B)\}.$$

Определите сами понятия *круг*, *луч*, *прямая*, *взаимно перпендикулярные прямые*.

6.2. Примеры метрических пространств

Понятие метрического пространства имеет в математике много различных применений. Метрическими пространствами являются числовые евклидовы пространства

$$(\mathbb{R}^n, r),$$

где

$$r((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}.$$

Сейчас мы приведем лишь несколько сравнительно простых примеров.

Пример 1. В пространстве из восьми вершин куба будем считать расстоянием между двумя вершинами *минимальное* число звеньев ломаной, соединяющей эти вершины и состоящей из ребер куба. Ясно, что такое расстояние может принимать только четыре значения: 0, a, $2a$, $3a$, где a — длина ребра куба.

Попробуйте применить к этому примеру данное выше определение отрезка.

Пример 2. Можно получить новые метрические пространства, определяя необычным образом расстояние на числовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Например, можно положить

$$r((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 + y_2|.$$

Выясните, как в этом случае будут выглядеть «окружности» и «круги».

Пример 3. Пусть (M, ρ) — метрическое пространство, а M_1 — подмножество множества M. Расстояние $\rho_1(P, Q)$ будем считать определенным только в случае, когда точки P и Q принадлежат M_1. В этом же случае положим

$$\rho_1(P, Q) = \rho(P, Q).$$

Получится метрическое пространство (M_1, ρ_1). Говорят, что это подпространство пространства (M, ρ).

1. *Это обычные числовые функции числового аргумента.* В терминах отображений — это отображения из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$.

2. Такие отображения из $\mathbb{R}$ в плоскость являются предметом изучения *в кинематике движений точки по плоскости.*

Пример. Движение под действием силы тяжести материальной точки, брошенной в начальный момент времени со скоростью v в горизонтальном направлении, описывается уравнениями

$$x(t) = vt, \qquad y(t) = h - \frac{gt^2}{2}, \tag{1}$$

где g — ускорение силы тяжести. Система координат выбрана так, что ось x направлена *горизонтально* по направлению начальной скорости, ось y — *вертикально вверх,* а координаты начального положения точки есть $(0, h)$ (рис. 41). При

$$t = T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$y(t) = 0$. Будем считать, что в этот момент времени материальная точка «упала на землю» и движение по закону (1) заканчивается. Формулы (1) определяют отображение

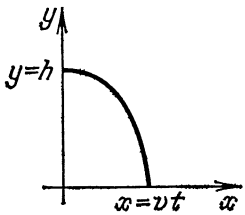


Рис. 41

$$t \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$$

отрезка $[0, T]$ числовой прямой на кривую, нарисованную на рис. 41.

Вообще, то, что в механике называют «движением материальной точки по плоскости», с точки зрения математика есть не что иное, как отображение

$$t \mapsto M(t)$$

из $\mathbb{R}$ в плоскость. Естественно, что движению в трехмерном пространстве соответствует отображение из $\mathbb{R}$ в трехмерное пространство.

3. Примером отображений третьего типа может служить отображение

$$M \mapsto \rho(O, M),$$

которое каждой точке M ставит в соответствие ее расстояние от некоторой фиксированной точки (например, на числовой плоскости от начала координат $O = (0, 0)$),

4. Приведем два примера отображений четвертого типа.

Пример. *Ортогональное проектирование на прямую* l:

$$M \to P_l(M)$$

(рис. 42, *а*). Область определения этого отображения есть вся плоскость, а множество значений — прямая l.

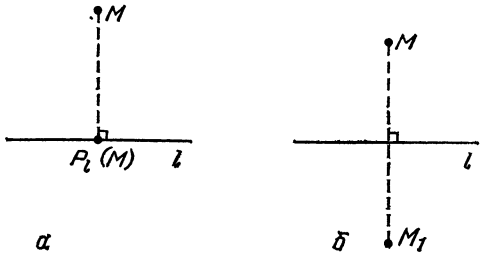


Рис. 42

Пример. *Осевая симметрия*:

$$M \to S_l(M),$$

которая каждой точке плоскости M ставит в соответствие такую точку $M_1 = S_l(M)$, что $MM_1 \perp l$ и пересечение MM_1 с l является серединой отрезка $[M, M_1]$ (рис. 42, *б*). Здесь область определения и множество значений совпадают — это *вся плоскость*. Отображение P_l *необратимо*, отображение же S_l обратимо. Заметьте на будущее: в геометрии плоскости принято обратимое отображение всей плоскости на себя называть геометрическим преобразованием.

Заметьте еще, что *осевая симметрия есть изометрическое отображение*, более коротко — изометрия. Изометриями плоскости (т. е. изометрическими отображениями всей плоскости на себя) мы будем далее специально заниматься (см. п. 6.11).

Изометрическое отображение плоскости на себя является частным случаем изометрического отображения одной фигуры на другую. Общее понятие изометрического отображения фигуры Ф на фигуру Φ_1 тесно связано с наглядным представлением о перемещениях твердых тел. В механике представляют себе тело Ф состоящим из «материальных точек» M. До перемещения каждая точка

тела Ф занимает положение M_0, а после перемещения попадает в точку пространства M_1. Обозначим Φ_0 множество всех *начальных* положений материальных точек, составляющих наше тело, Φ_1 — множество их *конечных* положений. Твердое тело перемещается так, что расстояния между составляющими его материальными точками сохраняются. При таком перемещении отображение

$$M_0 \mapsto M_1$$

фигуры Φ_0 на фигуру Φ_1 изометрично.

Таким образом, изучение перемещений твердых тел сводится к изучению изометрических отображений одной фигуры на другую.

Математики по этой причине иногда просто называют *изометрические* отображения *перемещениями*.

5. Отображения пятого типа естественно возникают при изучении *движений*. Заметьте, что мы различаем *перемещения* и *движения*. Например, любую плоскую фигуру Φ_0 при помощи перемещения можно наложить на центрально-симметричную ей относительно точки O фигуру Φ_1 (рис. 43). Это перемещение можно осуществить, вращая фигуру Φ_0 на 180° против часовой стрелки либо же вращая ее на 180° по часовой стрелке. Промежуточные положения фигуры при этих двух *движениях* фигуры будут различны. Мы имеем дело с двумя *различными* движениями, но в их результате получается *одно и то же перемещение*.

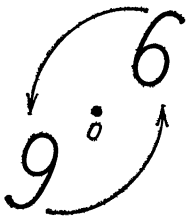


Рис. 43

Чтобы описать математически движение твердого тела, которое в начальный момент времени $t = 0$ занимало положение Φ_0, надо для каждой точки $M_0 \in \Phi_0$ и для всех интересующих нас моментов времени t указать положение

$$M = f(t, M_0) \tag{2}$$

в момент времени t материальной точки, которая в момент времени $t = 0$ занимала положение M_0.

Мы видим, что движение твердого тела описывается при помощи функций вида (2), т. е. отображений, отнесенных выше к пятому типу.

6.6. Замечание о параллельности и направлениях

Нам удобно несколько изменить традиционное определение параллельности прямых. Будем считать, что *две прямые параллельны, если*: а) *они совпадают* либо б) *они лежат в одной плоскости, но не имеют общих точек.*

Так понимаемое отношение параллельности обладает тремя свойствами:

а) *рефлексивности*: $a \parallel a$;
б) *симметричности*: если $a \parallel b$, то $b \parallel a$;
в) *транзитивности*: если $a \parallel b$ и $b \parallel c$, то $a \parallel b$.

Отношение же параллельности в традиционном смысле «антирефлексивно» (прямая не может быть параллельна самой себе). Вместо свойства транзитивности для параллельности в традиционном смысле можно сформулировать только такое утверждение: *если* $a \parallel b$, $b \parallel c$ *и прямые* a *и* c *различны, то* $a \parallel c$. Необходимость этой оговорки «*если прямые* a *и* c *различны*» часто доставляла бы нам много неудобств. Этим и объясняется переход к новому пониманию параллельности.

Два луча параллельны, если они лежат соответственно на двух параллельных прямых.

Два параллельных луча могут быть *одинаково направлены* или *противоположно направлены*. Понятие *одинаковой направленности* двух лучей может быть строго определено:

а) два луча, принадлежащие одной прямой, одинаково направлены, если один из них составляет часть другого (рис. 44, *а*);

б) два параллельных луча, не лежащих на одной прямой, одинаково направлены, если они лежат по одну сторону от прямой OO_1, соединяющей их начальные точки O и O_1, т. е. лежат в одной из двух полуплоскостей, на которые прямая OO_1 разбивает плоскость (рис. 44, *б*).

На рис. 44, *в* лучи противоположно направлены.

Несколько сложнее доказать, что отношение «одинаковой направленности» двух лучей обладает свойствами *рефлексивности, симметричности* и *транзитивности*.

Принимая это без доказательства, приходим к выводу, что все лежащие на плоскости лучи разбиваются на классы так, что любые два луча одного класса *одинаково направлены*, а два луча разных классов *не одинаково направлены*. Это позволяет дать точное опре-

деление самому понятию *направление*: *направление* — это просто *один из сейчас описанных классов лучей*.

Аналогичным образом все прямые плоскости разбиваются на *пучки параллельных*. Лучи, лежащие на пря-

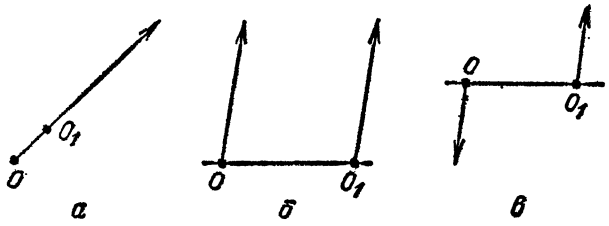


Рис. 44

мых *пучка параллельных*, могут иметь только два направления. Эти два направления называются противоположными друг другу.

6.7. Параллельные переносы

Параллельный перенос — *это такое преобразование плоскости, при котором все точки переносятся в одном и том же направлении на одно и то же расстояние*. С наглядной точки зрения ясно, что параллельный перенос T полностью определяется заданием одной пары точек (A, B):

$$T(A) = B.$$

Такой параллельный перенос обозначают значком T_{AB}. Формальное определение отображения T_{AB} различно в случае совпадающих и не совпадающих точек A и B.

1. T_{AA} есть тождественное отображение плоскости на себя: $E(X) = X$.

2. Если $A \neq B$, то для получения

$$Y = T_{AB}(X)$$

проводят луч с началом X, одинаково направленный с лучом AB, и на этом луче находят точку Y, для которой

$$\rho(X, Y) = \rho(A, B).$$

Легко видеть, что наше отображение обратимо. Для переноса T_{AB} имеется обратный перенос T_{BA}:

$$T_{BA}(T_{AB}(M)) = M.$$

В п. 4 раздела II вы познакомились с умножением отображений. Оно не всегда коммутативно. Но справедлива

Теорема 1. *Умножение параллельных переносов коммутативно. Всегда* $T_2T_1 = T_1T_2$.

Доказательство. Надо доказать, что при любом X из

$$T_1(X) = Y, \quad T_2(Y) = Z, \tag{1}$$

$$T_2(X) = U \tag{2}$$

вытекает

$$T_1(U) = Z \tag{3}$$

(рис. 45). Если точки X, Y, Z не лежат на одной прямой, то из (1) и (2) вытекает, что точки X, Y, Z, U образуют вершины параллелограмма (объясните, почему), а из этого вытекает (3).

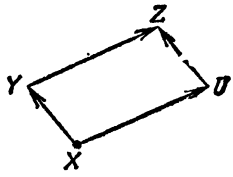


Рис. 45

Разберите отдельно случай, когда X, Y, Z лежат на одной прямой. Этим доказательство завершается.

Теорема 2. *Произведение двух параллельных переносов есть параллельный перенос.*

Элементарное геометрическое доказательство требовало бы рассмотрения ряда частных случаев. Основной «общий случай» изображен на рис. 46. Надо доказать,

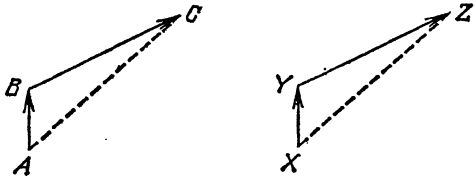


Рис. 46

что отрезки AC и XZ одинаково направлены и равны по длине.

Проведем чисто алгебраическое доказательство на основе теоремы 1.

Доказательство. Пусть

$$T_1(A) = B, \quad T_2(B) = C.$$

Если существует параллельный перенос $T_3 = T_2T_1$, то

$$T_3(A) = C. \tag{4}$$

Мы определяем перенос T_3 именно этим равенством (4). Надо доказать, что при любом X из

$$T_1(X) = Y, \quad T_2(Y) = Z$$

вытекает

$$T_3(X) = Z. \tag{5}$$

Введем еще перенос $T = T_{AX}$. Тогда по теореме 1

$$T(B) = TT_1(A) = T_1T(A) = T_1(X) = Y,$$
$$T(C) = TT_2(B) = T_2T(B) = T_2(Y) = Z.$$

Поэтому

$$T_3(X) = T_3T(A) = TT_3(A) = T(C) = Z.$$

Равенство (5) доказано, что и требовалось.

Ранее мы видели, что для каждого параллельного переноса существует обратный. Значит, *параллельные переносы образуют группу преобразований плоскости.*

Теорема 3. *Параллельный перенос является перемещением, т. е. сохраняет расстояния между точками.*

Доказательство. Пусть

$$T(A) = A', \quad T(B) = B'.$$

Введем перенос $T^* = T_{AB}$. По теореме 1

$$T^*(A') = T^*T(A) = TT^*(A) = T(B) = B'.$$

По определению параллельного переноса T^*

$$T^*(A) = B, \quad T^*(A') = B',$$

откуда вытекает

$$\rho(A', B') = \rho(A, B), \qquad \text{ч. т. д.}$$

Задачи.

1. Докажите, что при параллельном переносе каждая прямая переходит в параллельную ей прямую, а каждый луч в луч того же направления.

2. Покажите, что перемещение, переводящее каждый луч в луч того же направления, есть параллельный перенос.

3. Укажите пример перемещения, которое каждую прямую переводит в параллельную ей прямую, но не является параллельным переносом.

6.8. Векторы

Один и тот же параллельный перенос T можно задать при помощи многих различных пар точек: $T = T_{AB} = T_{A_1B_1} = T_{A_2B_2} = \ldots$ Возможно, что вы уже привыкли на уроках физики говорить, что отрезки AB,

A_1B_1, A_2B_2, ... «изображают» один и тот же вектор

$$a = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2} = \ldots$$

Иногда говорят так: вектор — это просто направленный отрезок, т. е. отрезок, у которого отмечена «начальная» и «конечная» точки, но условливаются дополнительно, что векторы, определяющие один и тот же параллельный перенос, «равны».

Современная математика не признает такого рода не имеющих ясного смысла оборотов мысли. В нашем курсе знак равенства ставится только между двумя обозначениями одного и того же объекта. Например,

$$0{,}25 = 1/4 = 25\%,$$

так как 0,25, 1/4 и 25% — это разные записи одного и того же числа. Требования математиков можно было бы удовлетворить, считая, что вектор

$$a = \overrightarrow{AB}$$

есть множество всех таких отрезков XY, что

$$T_{XY} = T_{AB}. \qquad (1)$$

Легко доказать, что множество отрезков XY, для которых выполняется (1), совпадает с множеством отрезков, которые получаются из отрезка AB параллельным переносом.

В самом деле, (1) равносильно

$$T_{AX} = T_{BY} \qquad (2)$$

(докажите!).

Получаться параллельным переносом есть рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение между направленными отрезками. Поэтому все направленные отрезки разбиваются на классы получающихся друг из друга параллельным переносом. Каждый такой *класс* и можно было бы назвать *вектором*. Придется только добавить *нулевой вектор*, который в собственном смысле слова отрезками не изображается.

Логически проще, однако, вместо направленных отрезков AB рассматривать просто пары точек (A, B). Так мы и поступим.

Определение. *Вектором называется множество всех пар точек, которые получаются из какой-либо одной пары точек всевозможными параллельными переносами.*

Отношение

$$(X,\ Y) \in \boldsymbol{a}$$

записывают в виде

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{XY}.$$

(Векторы обозначают в печати строчными жирными буквами, в рукописном тексте ставится черта сверху.)

Из предыдущего ясно, *что множество всех пар* (X, Y), *для которых*

$$T(X) = Y,$$

есть вектор. Оно, впрочем, уже имеет и другое название: *это график* Γ_T *отображения* T. Он однозначно определяет отображение T. Если

$$\boldsymbol{a} = \Gamma_T,$$

то пишут

$$T = T_{\boldsymbol{a}}.$$

Соответствие

$$T \mapsto \boldsymbol{a} = \Gamma_T, \quad \boldsymbol{a} \mapsto T = T_{\boldsymbol{a}}$$

взаимно однозначно.

Теперь мы уже имеем право считать записи

$$T_{AB} = T_{A_1B_1} \text{ и } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$$

равносильными.

6.9. Сложение векторов и умножение векторов на число

Сложение векторов определяется формулой

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}. \tag{1}$$

Это определение корректно, так как в действительности определяемая им сумма

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$$

не зависит от выбора начальной точки A (B и C определяются тем, что $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{BC}$ (рис. 47)).

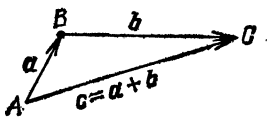


Рис. 47

Обычно дают прямое геометрическое доказательство этого факта. Нам проще ввести параллельные переносы $T_{\boldsymbol{a}}$ и $T_{\boldsymbol{b}}$. Равенство (1) равносильно равенству

$$T = T_{\boldsymbol{b}} T_{\boldsymbol{a}} = T_{\overrightarrow{AC}}.$$

Это произведение не зависит от выбора точки A. Значит, от выбора этой точки не зависит и вектор

$$\boldsymbol{c} = \overrightarrow{AC}.$$

Попутно мы установили основную формулу

$$T_{\boldsymbol{a}} T_{\boldsymbol{b}} = T_{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}.$$

Когда параллельные переносы перемножаются, соответствующие векторы складываются. Теперь из коммутативности и ассоциативности умножения параллельных переносов сразу вытекают соответствующие свойства сложения векторов (рис. 48):

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}, \qquad \text{(I)}$$

$$\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}. \qquad \text{(II)}$$

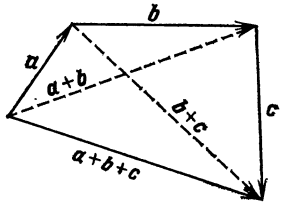


Рис. 48

Отметим еще свойство *нулевого* вектора

$$\mathbf{0} = \{(A, B) \mid A = B\}.$$

Из (1) вытекает

$$\boldsymbol{a} + \mathbf{0} = \boldsymbol{a}. \qquad \text{(III)}$$

Абсолютная величина (иначе — *модуль*, или *длина*) вектора определяется формулой

$$|\overrightarrow{AB}| = \rho\,(A, B), \qquad (2)$$

корректность которой доказывается без труда.

Направление вектора $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$ есть общее направление лучей AB, $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$. Нулевой вектор $\mathbf{0}$ *не имеет* направления.

Умножение вектора на число определяется так:

1) $$0 \cdot \boldsymbol{a} = \mathbf{0}; \qquad \text{(IV)}$$

2) $$k \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}; \qquad \text{(V)}$$

3) *если* $k > 0$, $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$, *то* $k\boldsymbol{a}$ *есть вектор длины* $k|\boldsymbol{a}|$, *одинаково направленный с вектором* $\boldsymbol{a}$;

4) *если* $k < 0$, $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$, *то* $k\boldsymbol{a}$ *есть вектор длины* $|k| \cdot |\boldsymbol{a}|$, *направленный противоположно вектору* $\boldsymbol{a}$.

Легко, хотя и довольно хлопотно, доказываются свойства сложения векторов и их умножения на число:

$$k(la) = (kl)\,a, \qquad \text{(VI)}$$

$$(k + l)\,a = ka + la. \qquad \text{(VII)}$$

Здесь все входящие в рассмотрение векторы можно изображать парами точек (или отрезками), лежащими на одной прямой. Поэтому свойства VI и VII, по существу, вам хорошо знакомы еще из средних классов школы.

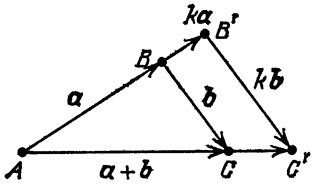


Рис. 49

Иначе обстоит дело со вторым дистрибутивным законом (первый дистрибутивный закон записан в виде (VII)):

$$k(a + b) = ka + kb. \qquad \text{(VIII)}$$

Но (VIII) есть непосредственное следствие известных вам из школы свойств пропорциональных отрезков (рис. 49): если $a = \overrightarrow{AB}$ и $b = \overrightarrow{BC}$, а $ka = \overrightarrow{AB'}$ и $kb = \overrightarrow{B'C'}$, то $a + b = \overrightarrow{AC}$ а $ka + kb = \overrightarrow{AC'} = k(a + b)$, ч. т. д.

6.10. Параллельные переносы и векторы в координатах

Обычно говорят, что задание системы координат требует указания начальной точки O, двух исходящих из нее взаимно перпендикулярных лучей Ox и Oy и единицы измерения длин. Отложив на лучах Ox и Oy единичные отрезки OE_x и OE_y, получим два вектора, которые принято обозначать

$$i = \overrightarrow{OE_x}, \quad j = \overrightarrow{OE_y}.$$

Легко понять, что *система координат полностью определяется указанием точки O и векторов i и j*. Векторы i и j взаимно перпендикулярны *) и имеют одинаковую длину. Значит, можно считать, что *произвольная*

*) Не равные нулю векторы $a = \overrightarrow{OA}$, $b = \overrightarrow{OB}$ перпендикулярны, если перпендикулярны отрезки OA и OB. Это определение корректно (смысл его не зависит от выбора точки O). Нулевой вектор 0 считают перпендикулярным любому другому. Почему это разумно, вы увидите далее.

прямоугольная декартова система координат задается указанием начальной точки O и двух взаимно перпендикулярных векторов $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ одинаковой длины.

Мы уже знаем, что существуют взаимно однозначные отображения

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA} \mapsto A$$

множества всех векторов $\boldsymbol{a}$ на множество всех точек A и

$$A \mapsto (x_A, y_A)$$

множества всех точек A на множество всех пар чисел (x, y). Возникающее отсюда отображение $\boldsymbol{a} \mapsto (x, y)$ тоже взаимно однозначно. Поэтому *числа x_A и y_A можно считать и координатами вектора $\boldsymbol{a}$.*

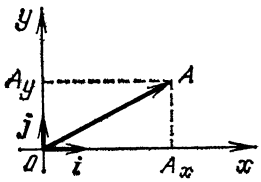


Рис. 50

Задача. Докажите, что

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_x} + \overrightarrow{OA_y} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{i}$$

рис. 50).

Из отмеченной выше взаимной однозначности соответствия $\boldsymbol{a} \mapsto (x, y)$ вытекает, что *вектор $\boldsymbol{a}$ может быть представлен в виде*

$$\boldsymbol{a} = x \cdot \boldsymbol{i} + y \cdot \boldsymbol{j} \qquad (1)$$

единственным образом. Координаты x и y вектора $\boldsymbol{a}$ будем обозначать соответственно через a_x и a_y.

Мы исходили из определенной системы координат, заданной точкой O и векторами $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$. Но из сказанного ясно, что коэффициенты a_x и a_y представления

$$\boldsymbol{a} = a_x \cdot \boldsymbol{i} + a_y \cdot \boldsymbol{j}$$

не зависят от выбора точки O.

Декартова прямоугольная система координат для векторов определяется выбором двух взаимно перпендикулярных векторов одинаковой длины $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$.

Докажите, что *при параллельном переносе $T_{a\boldsymbol{i}}$ точка с координатами (x, y) переходит в точку с координатами*

$$x' = x + a, \qquad y' = y.$$

Аналогично, *при параллельном переносе $T_{b\boldsymbol{j}}$ точка с координатами (x, y)* переходит в точку с координатами

$$x' = x, \qquad y' = y + b.$$

При любом векторе $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j}$ параллельный перенос

$$T_{\boldsymbol{a}} = T_{a_x\boldsymbol{i}} T_{a_y\boldsymbol{j}}$$

переводит точку с координатами (x, y) в точку с координатами

$$x' = x + a_x, \qquad y' = y + a_y. \tag{2}$$

Мы научились записывать параллельный перенос в координатах. Конечно, формулы (2) можно получить и из чисто наглядных соображений. Заметьте, однако, что их аккуратное «элементарное» доказательство потребовало бы рассмотрения ряда частных случаев.

Векторы

$$\boldsymbol{a}_x = a_x\boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{a}_y = a_y\boldsymbol{j}$$

называются *составляющими вектора* $\boldsymbol{a}$ *в данной системе координат*. Запишем координаты входивших в наши рассмотрения векторов:

Вектор	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{a}_x$	$\boldsymbol{a}_y$	$\boldsymbol{a}$
Координаты	$(1, 0)$	$(0, 1)$	$(a_x, 0)$	$(0, a_y)$	(a_x, a_y)

6.11. Общий вид изометрий плоскости

Кроме параллельных переносов в восьмилетней школе вы, по существу, имели дело еще с двумя видами перемещений: *поворотами* и *осевыми симметриями*.

Сначала рассмотрим повороты *против часовой стрелки* на углы

$$0° \leqslant \alpha \leqslant 360°.$$

При таком повороте вокруг центра O любая точка M переходит в точку M', лежащую на луче OM' с углом $\angle MOM' = \alpha$ на расстоянии от центра

$$\rho(OM') = \rho(OM)$$

(рис. 51). Отображение плоскости на себя $M \mapsto M'$ будем называть *поворотом с центром* O *на угол* α и обозначать R_O^α.

Докажите с той отчетливостью, с какой сумеете, что *поворот*

$$R_O^\alpha(M) = M'$$

есть перемещение,

Можно представить себе, что поворот осуществляется при помощи протекающего во времени процесса вращения. Если при вращении угол поворота, непрерывно увеличиваясь, достигает 360°, то получившийся в результате вращения поворот будет просто поворотом на 0°. То же самое будет при вращении на $n \cdot 360°$ при любом натуральном n. Вращение *по часовой стрелке* будем измерять в числе градусов, взятом *со знаком минус*. При вращении на —90° получим поворот, который можно получить и вращением на +270°. Тот же результат получится и при вращении на 630° и, вообще, на

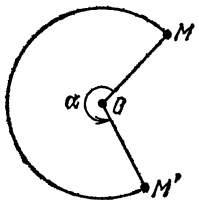


Рис. 51

$$(m \cdot 360 + 270)°$$

при любом ц е л о м m.

Поэтому, по определению, разумно считать поворот на $a°$, где a — любое действительное число, поворотом на

$$(360 \cdot \{a/360\})°$$

(фигурные скобки — знак дробной части).

Легко убедиться в том, что при таком соглашении становится универсально применимой формула для произведения поворотов с общим центром:

$$R_O^{\alpha} R_O^{\beta} = R_O^{\alpha+\beta}. \qquad (1)$$

В частности, из (1) получаем

$$R_O^{-\alpha} R_O^{\alpha} = R_O^{0} = E.$$

Таким образом:

$$(R_O^{\alpha})^{-1} = R_O^{-\alpha}.$$

Об осевой симметрии S_l уже говорилось в п. 6.5. Для нее

$$S_l^2 = E, \quad S_l^{-1} = S_l.$$

Нам сейчас понадобится еще один вид перемещений: если вектор $\boldsymbol{a}$ параллелен прямой p, то перемещение

$$F = T_{\boldsymbol{a}} S_p$$

называется *скользящей симметрией* (рис. 52). Считая нулевой вектор параллельным любой прямой *), будем

*) Аналогично, нулевой вектор считают параллельным любому другому. Заметьте, что параллельность векторов транзитивна лишь для векторов $\boldsymbol{a} \neq 0$.

считать обыкновенную осевую симметрию частным случаем скользящей. Имеет место

Теорема Шаля. *Любое перемещение является либо параллельным переносом, либо поворотом, либо скользящей симметрией.*

Доказательство будет опираться на «*принцип подвижности плоскости*», которым вы, по существу, часто поль-

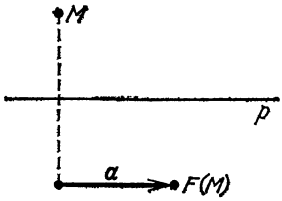


Рис. 52

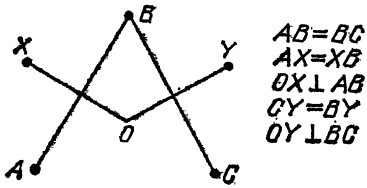


Рис. 53

зовались в восьмилетней школе. В учебнике А. П. Киселева он формулировался в виде аксиомы:

Пусть на плоскости даны два луча OA и O_1A_1. Существует ровно два перемещения, которые переводят луч OA в луч O_1A_1.

Доказательство теоремы Шаля. Если $F = E$, то F есть и параллельный перенос на нулевой вектор, и поворот на нулевой угол. Остается рассмотреть случай, когда F не есть E. Тогда существует такая точка A, что

$$B = F(A) \neq A.$$

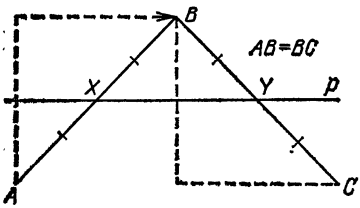


Рис. 54

Пусть

$$C = F(B).$$

Луч AB при перемещении F переходит в луч BC. Если мы найдем два различных перемещения, обладающих тем же свойством, то одно из них и будет перемещением F.

Заметьте, что $\rho(A, B) = \rho(B, C)$. Для случая, когда A, B, C не лежат на одной прямой, на рис. 53 построен центр поворота O, переводящий A в B, а B в C. На рис. 54 построена скользящая симметрия, обладающая тем же свойством.

Если A, B, C лежат на одной прямой, то возможны два случая: изображенный на рис. 55, *а*, и случай $C = A$ (рис. 55, *б*). В случае рис. 55, *а* нужные нам перемещения суть параллельный перенос T_{AB} и скользящая симметрия

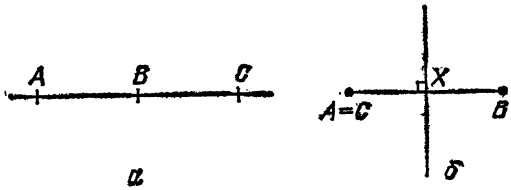


Рис. 55

$T_{AB}S_{AB}$. В случае рис. 55, *б* — поворот на 180° вокруг середины отрезка и осевая симметрия со серединным перпендикуляром отрезка в качестве оси. Теорема доказана.

6.12. Кинематика точки. Радианное измерение углов

С точки зрения математика, кинематика точки изучает функции P_t действительного аргумента t с точечными значениями. Лишь для наглядности аргумент t интерпретируется как «время». Разберем два примера.

Пример 1. *Равномерное прямолинейное движение*:

$$P_t = T_{tv}(P_0).$$

Вектор v есть *скорость движения*.

В координатах

$$x = x_0 + v_x t, \quad y = y_0 + v_y t.$$

Пример 2. *Равномерное движение по окружности*:

$$P_t = R_O^{t\gamma}(P_0).$$

Здесь γ — угол, на который поворачивается отрезок OP за единицу времени.

Если $\gamma = \theta°$, то за промежуток времени длины t точка P_t проходит по окружности радиуса

$$\rho(O, P_0) = r,$$

путь длины

$$= \frac{\pi}{180} \cdot \theta r t. \qquad (1)$$

Легко понять, что можно избавиться от множителя $\pi/180$, если измерять углы в надлежащих единицах. Выберем за единицу измерения углов угол

$$\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \approx 57^{\circ}17'45'' \ldots$$

Этот угол называется угловым радианом и обозначается *рад*. Обратно,

$$1^{\circ} = \frac{\pi}{180}\,(\text{рад}) \approx 0{,}01745329\ (\text{рад}).$$

Ясно, что

$$\theta^{\circ} = \omega\,(\text{рад}), \quad \text{где} \quad \omega = \frac{\pi}{180}\theta.$$

Формула (1) при радианном измерении приобретает простой вид

$$l = \omega r t. \tag{2}$$

Радианное измерение углов далее будет считаться основным. Поворот на ω радианов будет обозначаться просто

$$R_O^{\omega}.$$

Теперь поворот определяется точкой O и числом ω. Так как

$$360^{\circ} = 2\pi\ (\text{рад}),$$

то

$$R_O^{\omega+2\pi} = R_O^{\omega}.$$

Формула равномерного вращательного движения приобретает теперь вид

$$P_t = R_O^{\omega t} P_0.$$

Здесь ω — угловая скорость, выраженная в радианах.

Замечание. До введения радианного измерения углов, говоря об «угле α», мы считали α обозначением «величины угла» как скалярной величины, которая при измерении в различных единицах выражается различными числами. Например, запись $\alpha = 90^{\circ}$ равносильна записи $\alpha = \pi/2$ (рад). После введения нового соглашения о преимущественной роли радианного измерения мы выражаем меру угла одним определенным числом. Угол $\pi/2$ есть угол в 90°, угол $\alpha = 2$ есть угол приблизительно в 115° и т. д. Чтобы быть последовательным, в этой системе обозначений можно сохранить записи вида $\alpha = 90^{\circ}$, лишь решившись считать 1° просто записью числа $\pi/180 \approx 0{,}01745$.

Рассмотрим более сложный пример движения точки.

Пример 3. *Циклоида.* Пусть точка P_t в начальный момент времени $t = 0$ находится в начале координат и движется с единичной скоростью в положительном направлении оси абсцисс. Вокруг точки P_t вращается с единичной угловой скоростью против часовой стрелки

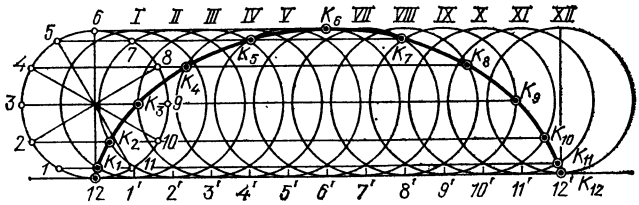


Рис. 56

отрезок P_tQ_t, который при $t = 0$ направлен вертикально вверх.

Как это принято в механике, будем описывать движение точки при помощи ее *радиус-вектора*

$$\boldsymbol{r}_t = \overrightarrow{OQ_t}.$$

Ясно, что

$$\boldsymbol{r}_t = \overrightarrow{OP_t} + \overrightarrow{P_tQ_t}.$$

Вектор $\overrightarrow{OP_t}$ изменяется во времени по закону

$$\overrightarrow{OP_t} = t \cdot \boldsymbol{i}.$$

Вектор $\overrightarrow{P_tQ_t}$ в начальный момент времени $t = 0$ равен $\boldsymbol{j}$, с течением же времени вращается равномерно с единичной скоростью:

$$\overrightarrow{P_tQ_t} = R^t(\boldsymbol{j}).$$

Уравнение движения точки P_t имеет вид

$$\boldsymbol{r}_t = t \cdot \boldsymbol{i} + R^t(\boldsymbol{j}).$$

Траектория движения — циклоида. Способ ее построения указан на рис. 56.

При решении задачи мы воспользовались операцией R^α поворота вектора на угол α. Это операция определяется равенством

$$R^\alpha(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OR_O^\alpha(A)}.$$

6.13. Синус и косинус

Рассмотрим равномерное движение точки P_t с единичной скоростью по единичной окружности

$$x^2 + y^2 = 1$$

против часовой стрелки, считая, что в начальный момент времени $t = 0$ точка находится в положении $P_0 = (1, 0)$. Координаты x_t и y_t точки P_t для этого специального вида движения имеют особые названия:

$$x_t = \cos t, \quad y_t = \sin t.$$

Не дожидаясь систематического изучения тригонометрии, установите, что рассмотренная в конце предыдущего пункта циклоида описывается уравнениями

$$x = t - \sin t, \quad y = \cos t.$$

Это параметрическое уравнение кривой: когда параметр t пробегает множество действительных чисел $\mathbb{R}$, точка (x, y) пробегает циклоиду.

6.14. Координатная запись произвольных поворотов

Можно дать определения синуса и косинуса при помощи поворотов единичного вектора $\boldsymbol{i}$. Пусть

$$\boldsymbol{e}_t = R^t(\boldsymbol{i}).$$

Тогда координаты $x(t)$ и $y(t)$ вектора $\boldsymbol{e}(t)$ и являются синусом и косинусом t: $x_t = \cos t$, $y_t = \sin t$.

Произвольный вектор $\boldsymbol{a}$ можно получить поворотом из вектора $\boldsymbol{i}$, умноженного на $a = |\boldsymbol{a}|$:

$$\boldsymbol{a} = a(\cos\alpha \cdot \boldsymbol{i} + \sin\alpha \cdot \boldsymbol{j}).$$

Ясно, что координаты такого вектора имеют вид

$$x = a\cos\alpha, \quad y = a\sin\alpha.$$

При помощи синуса и косинуса мы можем записать аналитически в координатах произвольные повороты. При этом мы будем опираться на то обстоятельство, что всегда

$$R^\alpha(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = R^\alpha(\boldsymbol{a}) + R^\alpha(\boldsymbol{b}), \quad R^\alpha(k\boldsymbol{a}) = k \cdot R^\alpha(\boldsymbol{a}).$$

Начнем с поворотов векторов $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$. По определению синуса и косинуса

$$R^\alpha(\boldsymbol{i}) = \cos\alpha \cdot \boldsymbol{i} + \sin\alpha \cdot \boldsymbol{j}. \tag{1}$$

Заметив, что

$$R^{\pi/2}(\boldsymbol{i}) = \boldsymbol{j}, \quad R^{\pi/2}(\boldsymbol{j}) = -\boldsymbol{i},$$

получим

$$R^{\alpha}(\boldsymbol{j}) = R^{\alpha}R^{\pi/2}(\boldsymbol{i}) = R^{\pi/2}(\cos\alpha\cdot\boldsymbol{i} + \sin\alpha\cdot\boldsymbol{j}) = \\ = -\sin\alpha\cdot\boldsymbol{i} + \cos\alpha\cdot\boldsymbol{j}. \qquad (2)$$

Для произвольного вектора

$$\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$$

в силу (1) и (2) имеем

$$R^{\alpha}(\boldsymbol{a}) = x(\cos\alpha\cdot\boldsymbol{i} + \sin\alpha\cdot\boldsymbol{j}) + y(-\sin\alpha\cdot\boldsymbol{i} + \cos\alpha\cdot\boldsymbol{j}) = \\ = (x\cos\alpha - y\sin\alpha)\,\boldsymbol{i} + (x\sin\alpha + y\cos\alpha)\,\boldsymbol{j},$$

т. е. для координат вектора $\boldsymbol{a}' = R^{\alpha}\boldsymbol{a}$

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha, \quad y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha. \qquad (3)$$

Ясно, что эти формулы можно рассматривать как формулы для нахождения координат точки

$$(x', y') = R_0^{\alpha}(x, y).$$

Мы записали поворот вокруг начала координат аналитически.

Можно применить формулы (3) для нахождения координат вектора

$$e_{\alpha+\beta} = R^{\alpha}(e_{\beta}).$$

Ясно, что эти координаты являются не чем иным, как синусом и косинусом $\alpha + \beta$. Имеем поэтому

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \end{aligned} \qquad (4)$$

Эти *формулы сложения* для синуса и косинуса имеют основное значение для всей теории тригонометрических функций, которой мы будем заниматься в одной из следующих глав.

6.15. Движение подвижной плоскости по неподвижной. Ориентация

Геометрически «плоские задачи» кинематики «твердого тела» сводятся к рассмотрению семейства фигур Φ_t, зависящих от параметра t так, что

$$\Phi_t = F_t(\Phi_0),$$

где F_t — зависящие от t перемещения.

Обычно движение предполагают непрерывным: считают, что точка

$$P_t = F_t(P_0)$$

«непрерывно» зависит от времени t. Точный смысл слова «непрерывно» мы постепенно выясним. Пока будем им пользоваться, рассчитывая на достаточную отчетливость его интуитивного понимания.

Математики предпочитают иметь дело с перемещениями, как отображениями всей плоскости на себя. Так мы и будем понимать выражение «*перемещение F_t, непрерывно зависящее от параметра t*».

По формулам

$$E = F_0, \quad R_O^\alpha = F_1 \text{ при } F_t = R_O^{t\alpha}$$

мы видим, что *поворот R_O^α может быть получен при помощи «непрерывного движения плоскости по себе»*. В силу формул

$$E = F_0, \quad T_a = F_1 \text{ при } F_t = T_{ta}$$

то же самое верно для параллельных переносов.

Однако *для симметрий и скользящих симметрий это не так.* Для скользящей симметрии S не существует семейства перемещений F_t, зависящих непрерывно от параметра t так, что

$$F_0 = E, \quad F_1 = S.$$

Это различие дает повод считать повороты и параллельные переносы «*перемещениями первого рода*», а скользящие симметрии (в частности, обыкновенные осевые) — *перемещениями второго рода.*

Определение. *Перемещение F является перемещением первого рода, если существует однопараметрическое непрерывное семейство перемещений F_t такое, что*

$$F_0 = E, \quad F_1 = F.$$

Остальные перемещения называются *перемещениями второго рода.*

Из принципа подвижности плоскости (см. с. 154) вытекает, что пара перпендикулярных лучей (OX, OY) переводится в пару (O_1X_1, O_1Y_1) точно одним перемещением. Если это перемещение первого рода, то считают, что пары (OX, OY) и (O_1X_1, O_1Y_1), как и соответствующие им системы координат, или пары единичных векторов $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ и $(\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{j}_1)$ одинаково ориенти-

рованы; если же для их совмещения требуется перемещение *второго рода* — они противоположно ориентированы.

Все пары перпендикулярных лучей, таким образом, разбиваются на два класса — имеют одну из двух «ориентаций».

Легко понять, что произведение перемещений *одного и того же рода* есть перемещение *первого рода*, а произведение перемещений *разного рода* — перемещение *второго рода*. Впрочем, со всем сказанным в этом пункте мы более обстоятельно познакомимся лишь позднее.

Задачи на перемещения.

1. Найти необходимые и достаточные условия переместительности двух осевых симметрий (когда $S_pS_q = S_qS_p$?).

2. Найти необходимые и достаточные условия переместительности параллельного переноса и симметрии (когда $T_aS_p = S_pT_a$?).

3. Доказать, что любое перемещение есть произведение либо двух, либо трех осевых симметрий.

4. Записать в координатах осевые симметрии

$$S_p(x, y) = (x', y')$$

для осей $x = 0$, $x = y$, $x = y + 1$.

5. Показать, что

$$R^{\alpha}_{O_1} = T^{-1}_{OO_1} R^{\alpha}_{O} T_{OO_1}.$$

6. Описать все параллельные переносы T, для которых при условии $p \parallel q$

$$T^{-1}S_pT = S_q.$$

7. Описать все повороты R, для которых при непараллельных p и q

$$R^{-1}S_pR = S_q.$$

В задачах 8—13 требуется описать все перемещения, которые фигуру Ф отображают на фигуру Φ_1, т. е. для параллельных переносов указать вектор переноса, для осевых симметрий — ось, для скользящих симметрий — ось и вектор переноса, для поворотов — центр и угол поворота.

8. Ф и Φ_1 — равносторонние треугольники (рис. 57, *а*).

9. Ф и Φ_1 — квадраты (рис. 57, *б*).

10. Ф и Φ_1 — правильные восьмиугольники (рис. 57, *в*).

11. Ф и Φ_1 — равные, касающиеся друг друга окружности (рис. 57, *г*).

12. Ф и Φ_1 — параллельные прямые.

13. Ф и Φ_1 — пересекающиеся прямые.

14. Показать, что центры поворотов, отображающих ограниченную фигуру на ограниченную фигуру, лежат на одной прямой, а оси обычной скользящей симметрии проходят через одну точку.

Замечание. Из решения задачи 13 видно, что условие ограниченности в задаче 14 существенно.

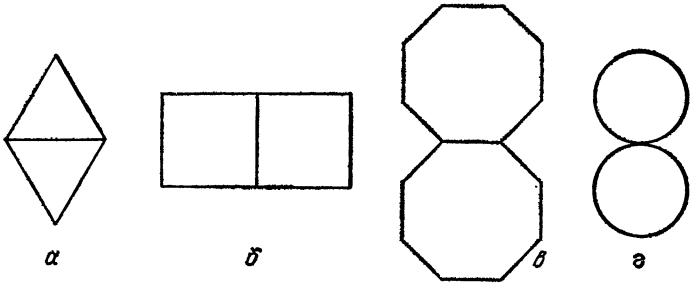


Рис. 57

15. Показать, что перемещение $R_{O_2}^{\alpha_2} R_{O_1}^{\alpha_1}$ при $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ есть параллельный перенос T_a, а при $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$ — поворот R_O^{α}. Определить a в первом случае, O и α — во втором.

6.16. Кинематика точки, скорость и ускорение

6.16.1. Векторные функции числового аргумента. Движение материальной точки по плоскости изображается функцией P_t действительного аргумента t с точечными значениями. Выбрав какую-либо точку O, получим векторную функцию числового аргумента

$$r(t) = \overrightarrow{OP_t}.$$

Выбрав систему координат с началом в точке O, обозначим x_t и y_t координаты точки P_t. Они же будут и координатами вектора $r(t)$.

Мы видим, что движение точки по плоскости можно описать также *при помощи векторной функции* $r(t)$ (часто этот вектор называют «*радиус-вектором*» точки P_t) и *при помощи двух числовых функций числового аргумента* x_t *и* y_t.

Многие кривые удобно представлять себе как траектории движущейся точки. Такое задание кривых называется *параметрическим* (входящая в уравнения переменная t — параметр). Например, окружность $x^2 + y^2 = 1$ можно задать параметрическими уравнениями

$$x_t = \cos t, \quad y_t = \sin t,$$

а эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ уравнениями

$$x_t = a \cos t, \quad y_t = b \sin t.$$

Если первоначально заданным предметом изучения является векторная функция $\boldsymbol{r}(t)$, то кривая, описываемая точкой P_t с радиус-вектором $\boldsymbol{r}(t)$, называется *годографом* векторной функции $\boldsymbol{r}(t)$.

По определению вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)$ имеет своим пределом вектор $\boldsymbol{r}_0$ с координатами (x_0, y_0) в том и только в том случае, когда $r_x(t)$ имеет своим пределом x_0, а $r_y(t)$ — y_0. Таким образом, запись $\boldsymbol{r}(t) \to \boldsymbol{r}_0$ равносильна тому, что $r_x(t) \to x_0$, а $r_y(t) \to y_0$.

Задача. Докажите, что если $\boldsymbol{r}(t) \to \boldsymbol{r}_0$, то $|\boldsymbol{r}(t)| \to |\boldsymbol{r}_0|$.

6.16.2. Производная вектор-функции. Рассмотрим произвольную вектор-функцию $\boldsymbol{r}(t)$ и дадим t приращение Δt. Мы договоримся, что векторы, являющиеся значениями вектор-функции, выходят из начала координат. В результате приращения Δt конец вектора $\boldsymbol{r}(t + \Delta t)$ займет некоторое положение $K(t + \Delta t)$ на годографе. Мы понимаем, что $\boldsymbol{r}(t)$ получил приращение $\Delta \boldsymbol{r}$; изобразим его на рисунке (рис. 58).

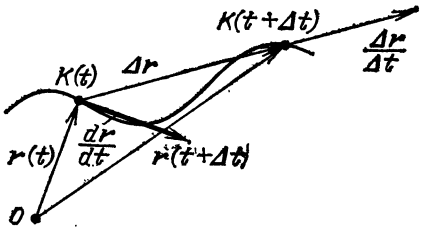


Рис. 58

Определение производной вектор-функции полностью совпадает с определением производной действительной функции действительного аргумента:

$$\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} = \boldsymbol{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}.$$

Заметим, исходя из определения предела вектор-функции, что наличие у $\boldsymbol{r}(t)$ производной влечет за собой существование производной у $r_x(t)$ и $r_y(t)$, и наоборот.

Мы знакомы с геометрическим и механическим смыслом производной действительной функции действительного аргумента, осознаем теперь это и для вектор-функции.

Заметим, что вектор $\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ при малых Δt всегда направлен вдоль отрезка $K(t)\,K(t + \Delta t)$ в сторону, отвечающую возрастанию t (покажите это, рассматривая Δt разных знаков; рис. 58).

Предположим, что вектор $r'(t)$ не равен нулю; это значит, что $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ и по величине, и по направлению неограниченно приближается к вектору $\frac{dr}{dt}$. Таким образом, *в точке $K(t)$ годограф имеет касательную, направление которой задается вектором $\frac{dr}{dt}$.*

Точка, в которой $\frac{dr}{dt}=0$, называется *особой точкой*. В этом случае мы не можем утверждать, что $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ приближается по направлению к какому-либо вектору, т. е. у годографа может и не быть касательной.

Замечание. Под касательной к кривой в точке P мы понимаем *предельное положение секущих*, проходящих через точку P и другие точки P' этой кривой, при условии, что эти точки P' приближаются по кривой к P справа или слева.

Если через $S(t)$ обозначить путь, пройденный точкой $K(t)$, то линейная скорость движения точки $K(t)$

$$V(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{|\Delta t|}.$$

Далее мы используем важное свойство длины гладкой дуги AA_0:

$$\lim_{A\to A_0}\frac{\text{длина дуги } AA_0}{\text{длина хорды } AA_0}=1.$$

Длина дуги есть $S(t+\Delta t)-S(t)$, а длина хорды — $|r(t+\Delta t)-r(t)|$. Мы знаем, что $\frac{r(t+\Delta t)-r(t)}{\Delta t}\to$ $\to r'(t)$ и $\frac{|r(t+\Delta t)-r(t)|}{|\Delta t|}\to|r'(t)|$, поэтому

$$V(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{|\Delta t|}=$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{|r(t+\Delta t)-r(t)|}\cdot\frac{|r(t+\Delta t)-r(t)|}{|\Delta t|}=|r'(t)|.$$

Таким образом, *вектор $r'(t)$ направлен по касательной к годографу, а его величина есть линейная скорость точки.* Обозначая τ единичный вектор, направленный по касательной в сторону движения, получаем

$$r'(t)=V(t)\,\tau,$$

где $V(t) = r'(t)$ — *вектор скорости* (или просто *скорость*) точки.

Если точка O выбрана за начало координат, то координаты точки $P(t)$ являются координатами вектора

$$r(t) = \overrightarrow{OP_t}.$$

В случае вектора $r(t)$ длины 1, вращающегося равномерно с единичной угловой скоростью и в предположении, что при $t = 0$ этот вектор направлен вдоль положительного направления оси абсцисс, имеем

$$r_x(t) = \cos t, \quad r_y(t) = \sin t.$$

Так как вектор $V(t) = r'(t)$ получается из вектора $r(t)$ поворотом на угол $\pi/2$ (рис. 59), получаем

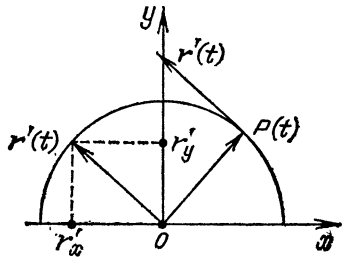


Рис. 59

$$r'_x(t) = \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right), \quad r'_y(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right).$$

А это и значит, что

$$(\cos t)' = -\sin t, \quad (\sin t)' = \cos t.$$

В результате повторного дифференцирования получаем аналогичным рассуждением

$$(\cos t)'' = -\cos t, \quad (\sin t)'' = -\sin t.$$

З а д а ч а. Покажите, что

$$(\cos kt)'' = -k^2 \cos kt, \quad (\sin kt)'' = -k^2 \sin kt.$$

Заметьте, что обе функции $\cos kt$ и $\sin kt$ удовлетворяют одному и тому же «дифференциальному уравнению»

$$f''(t) = -k^2 \cdot f(t).$$

Все сказанное к формулам дифференцирования действительных функций действительного аргумента добавляет еще две формулы

$$(\sin t)' = \cos t, \quad (\cos t)' = -\sin t.$$

С к о р о с т ь $r'(t)$ движения точки $K(t)$ является вектор-функцией. Ее производная называется у с к о р е н и е м точки.

В заключение отметим, что если $V(t)=\frac{dr(t)}{dt}=0$, то соответствующая точка P_t годографа особая. Если при этом хотя бы одна из производных

$$r''(t)=\frac{d^2r(t)}{dt^2},\quad r'''(t)=\frac{d^3r(t)}{dt^3},\ldots$$

отлична от нуля, то кривая все же имеет в точке P_t касательную; однако если $\frac{d^2r(t)}{dt^2}\neq 0$, то точка P_t обязательно будет точкой заострения годографа — годограф будет иметь форму «клюва» (наподобие двух касающихся четвертьокружностей).

7. О ЯЗЫКЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАКОВ

7.1. Термы и формулы

На практике для выражения своих мыслей математики пользуются как словами обычного языка, так и записями, составленными из специальных логических и математических знаков. Существуют глубокие причины того, что мысль, выраженная полностью на искусственно созданном математиками символическом языке без обращения к обычной живой речи, часто оказывается трудно воспринимаемой. Но принципиально важно понять, что *любое математическое рассуждение может быть формализовано*, т. е. полностью записано знаками, способ употребления которых регламентирован явно сформулированными правилами.

В этом пункте мы занимаемся «грамматикой» языка логических и математических знаков. Знаки и комбинации знаков, имеющие самостоятельный смысл, бывают четырех сортов:

1. *Записи, являющиеся обозначением какого-либо определенного предмета.* Так, записи

$$2,\ 3-1,\ 4:2,\ \frac{1001^2-999^2}{1001+999}$$

являются разными обозначениями одного и того же числа два; буква $\mathbb{N}$ и запись

$$\{n\colon n\in\mathbb{Z},\quad n>0\}$$

являются обозначениями одного и того же множества всех натуральных чисел.

2. *Записи, которые содержат знаки переменных и превращаются в обозначения определенных предметов при замене всех входящих в них переменных записями первого рода, т. е. именами определенных предметов.* Таковы сами знаки, объявленные нами знаками переменных

$$x,\ y,\ z$$

и т. п.; знаки переменных, возможными значениями которых являются числа

$$x+y,\quad \frac{x-17}{x+17},\quad x-1;$$

знаки переменных, возможными значениями которых являются точки плоскости

$$[AB]\ \text{(отрезок)},\quad (AB)\ \text{(прямая)},\quad \overrightarrow{AB}\ \text{(вектор)};$$

знаки переменных, возможными значениями которых являются прямые: S_l (симметрия с осью l).

3. *Высказывания — записи, относительно которых имеет определенный смысл вопрос, истинны они или ложны.* Пример и с т и н н о г о высказывания:

$$\frac{1001^2-999^2}{1001+999}=2.$$

Пример л о ж н о г о высказывания:

$$2+2=5.$$

4. *Записи, которые содержат знаки переменных и превращаются в высказывания при замене всех входящих в них переменных именами определенных предметов.* Например,

$$x+y=3,$$

$$(AB)\cap(CD)=E$$

(прямые (AB) и (CD) пересекаются в точке E).

Записи первых двух сортов называются т е р м а м и, а третьего и четвертого сорта — ф о р м у л а м и. Термы, не содержащие переменных, являются именами предметов, а формулы, не содержащие переменных, в ы с к а з ы в а н и я м и.

7.2. Правила построения термов и формул

Строго говоря, не существует одного универсального языка математических знаков. Разные авторы пользуются несколько разными языками. Существуют сложившиеся традиции различного употребления одних и тех же знаков в разных отделах математики. Но математик в каждом данном рассуждении должен точно знать законы того языка, на котором он в данное

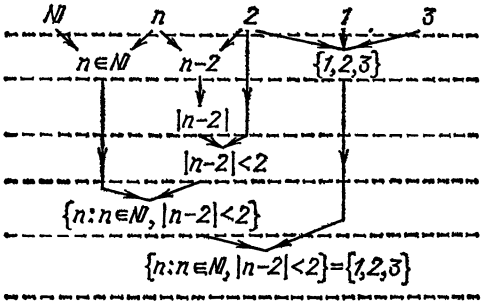


Рис. 60

время говорит. Прежде всего, это *чисто формальные правила образования термов и формул.*

Разберем в виде примера высказывание

$$\{n : n \in \mathbb{N}, \ | n - 2 | < 2\} = \{1, 2, 3\}. \qquad (1)$$

Строение этого высказывания можно изобразить *родословным деревом* (рис. 60).

В первом поколении мы имеем простые термы

$$\mathbb{N}, n, 1, 2, 3.$$

Из них $\mathbb{N}$, 1, 2 и 3 являются именами предметов, а n — переменной. Во втором поколении из термов n и $\mathbb{N}$, соединенных знаком принадлежности $\in$, получается формула

$$n \in \mathbb{N},$$

содержащая переменную n. Из термов n и 2, соединенных знаком вычитания «—», получается терм $n - 2$, содержащий переменную n. Из термов 1, 2 и 3, разделенных запятыми и заключенных в фигурные скобки, получается терм $\{1, 2, 3\}$. В третьем и четвертом поколениях

из терма $n - 2$ последовательно получаются терм $|n - 2|$ и формула $|n - 2| < 2$. Они тоже содержат переменную n.

Но в пятом поколении происходит нечто замечательное. Терм n и формулы $n \in \mathbb{N}$, $|n - 2| < 2$, содержащие переменную n, перемещаются в надлежащие места схемы

$$\{\text{терм} : \text{формула, формула}\},$$

и в результате получается терм, являющийся обозначением *вполне определенного множества*. Этот терм

$$\{n : n \in \mathbb{N},\ |n - 2| < 2\}$$

не содержит переменных, так как схема его образования «связывает» все переменные терма, стоящего перед двоеточием *).

В шестом поколении из двух термов, соединенных знаком равенства, получается высказывание (1).

Заметьте, что при образовании термов и формул, кроме знаков исходных простых термов, нам понадобились вспомогательные знаки — запятые, фигурные скобки, двоеточие, вертикальные прямые черточки, знаки принадлежности, неравенства, равенства. Перечислим все схемы построения термов и формул, которыми мы пользовались:

1) терм $\in$ терм $\rightarrow$ формула,
2) терм $-$ терм $\rightarrow$ терм,
3) {терм, терм, терм} $\rightarrow$ терм,
4) $|$ терм $|$ $\rightarrow$ терм,
5) терм $<$ терм $\rightarrow$ формула,
6) {терм : формула, формула} $\rightarrow$ терм,
7) терм $=$ терм $\rightarrow$ формула.

По поводу всех этих схем при полном описании нашего языка математических знаков должна быть указана судьба входящих в исходные термы и формулы переменных (какие из них связываются и какие остаются входящими во вновь образованные термы и формулы). В наших семи схемах переменные связываются только в схеме 6. *Правило связывания* было уже высказано: *связываются все переменные, входящие в терм перед*

---

*) Иногда говорят, что наш терм «не содержит свободных переменных». Но законна терминология, по которой связанные переменные совсем «не входят» в полученный после «связывания» терм. Ее мы и будем держаться.

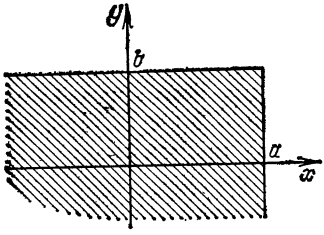


Рис. 61

двоеточием. Примеры: в терм

$$\{(x, y) : x < a, y < b\}$$

входят переменные a и b, но не входят переменные x и y. Если придать a и b определенные значения, то получится обозначение квадранта числовой плоскости, изображенного на рис. 61.

7.3. Бессмысленные термы. Типы переменных

Из терма $x : y$ можно образовать терм $1 : 0$, положив $x = 1$, $y = 0$. Можно ли назвать запись $1 : 0$ термом? Ведь делить на нуль нельзя. Оказывается, что разумно несколько изменить определение терма и все-таки считать $1 : 0$ термом. В качестве термов, не содержащих переменных, мы допустим и бессмысленные выражения, образованные по правилам принятого нами математического языка. А как поступить с формулой

$$1 : 0 = 2?$$

Мы будем считать ее л о ж н ы м в ы с к а з ы в а н и е м. Вообще, *формула, не содержащая переменных, для которой хотя бы один из термов, участвовавших в ее образовании, бессмыслен, считается ложной.*

Можно вполне корректно построить математический язык, в котором имеется только один вид переменных, вместо которых разрешается подставлять любые термы. Естественно, однако, что при этом получится очень много бессмысленных формул. Например, если знак $<$ понимается только в смысле неравенства между действительными числами, то терм ($\mathbb{Z}$ — множество целых чисел)

$$\{x: x < \mathbb{Z}\}$$

не имеет смысла, а формула

$$1723 < \mathbb{Z}$$

ложна.

Можно уменьшить возможности получения бессмысленных термов и часто упростить записи, введя несколько т и п о в переменных, условившись, например, что

в данном рассуждении буквы

$$i, j, k, l, m, n, p, q, r, s$$

обозначают переменные, допускающие в качестве значений только натуральные числа, буквы же

$$a, b, c, d, e, f, g, o, t, x, y, z, u, v, w$$

резервировать для переменных, могущих принимать любые действительные значения, и т.п. Соответственно делятся и термы, и в правилах образования термов и формул оговаривается, какого типа термы можно вставлять на те или иные места схем.

7.4. Логические операции над высказываниями и формулами

1. $\neg\mathfrak{A}$ (отрицание высказывания $\mathfrak{A}$) — «*$\mathfrak{A}$ ложно*».

2. $\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$ (конъюнкция высказываний $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$) — «*оба высказывания $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ истинны*».

3. $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ (дизъюнкция высказываний $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$) — «*хотя бы одно (может быть, и оба) из высказываний $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ истинно*».

4. $\mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathfrak{B}$ (эквивалентность) — «*оба высказывания $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ истинны, или оба ложны*».

Если формулы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ содержат переменные, то смысл формул

$$\neg\mathfrak{A},\ \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B},\ \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B},\ \mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathfrak{B}$$

определяется тем, что, заменив в них все переменные какими-либо определенными значениями, получают высказывания, смысл которых указан выше.

Например,

$$(x = y) \Leftrightarrow (x + y = 2)$$

превращается в истинную формулу:

а) при подстановке $x = y = 1$,

б) при любой подстановке $x = a$, $y = b$, где $a \neq b$ и $a + b \neq 2$.

Если $\mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathfrak{B}$ превращается в истинное высказывание *при любой подстановке* вместо всех входящих в $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ переменных любых определенных значений, то формулы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ называются равносильными.

Введем теперь операцию *)

$$\vdash \mathfrak{A},$$

*) Такое толкование знака $\vdash$ не общепринято, но, кажется, удобно.

при помощи которой из каждой формулы получается высказывание. Знак $\vdash$ читается: «*превращается в истинное высказывание при любой подстановке вместо всех входящих в* $\mathfrak{A}$ *переменных определенных значений*». Ясно, что равносильность формул $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ записывается в виде

$$\vdash (\mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathfrak{B}).$$

5. Импликацию двух высказываний $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$

$$\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}$$

будем считать ложной в том случае, когда $\mathfrak{A}$ истинно, а $\mathfrak{B}$ ложно; во всех же остальных случаях будем считать, что $\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}$ истинно. Как и для первых четырех логических операций отсюда выводится и смысл импликации $\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}$ для формул, содержащих переменные.

Высказывание

$$\vdash (\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B})$$

читается: «*формула* $\mathfrak{B}$ *является следствием формулы* $\mathfrak{A}$».

Обратите внимание на те места п. 5 раздела II, где знаки $\Leftrightarrow$ и $\Rightarrow$ употреблялись в смысле, который требовал бы, с установленной сейчас точки зрения, постановки впереди записей знака $\vdash$!

7.5. Кванторы $\forall$ и $\exists$

Знак $\vdash$ связывает все переменные в следующей за ним формуле. Следующие две операции связывают лишь некоторые переменные. Запись

$\forall x$ читается «*для всех* x»,

$\exists x$ читается «*существует такое* x, *что*».

Например,

$$\exists n\ (n \in \mathbb{N} \wedge a \geqslant nb)$$

есть формула с двумя переменными, а

$$\forall a\ \forall b\ (a > 0 \wedge b \in \mathbb{R}) \Rightarrow \exists n\ (n \in \mathbb{N} \wedge na > b) \quad (1)$$

— высказывание, называемое «аксиомой Архимеда».

Вместо (1) можно писать

$$\forall a > 0,\quad b \in \mathbb{R}\quad \exists n \in \mathbb{N}\quad (na > b). \quad (2)$$

Но соблюдайте корректность в употреблении кванторов $\forall$ и $\exists$. Общеприняты, строго говоря, лишь схемы

$\forall x\ \forall y \ldots$ формула $\mapsto$ формула,

$\exists x\ \exists y \ldots$ формула $\mapsto$ формула,

где x, y, ... — одна или несколько переменных. Приведя пример (2) мы, впрочем, допустили выходящие за пределы этих схем вольности.

7.6. О скобках

Еще в младших классах вы познакомились с правилами употребления скобок для указания порядка выполнения арифметических действий. Это частный случай применения скобок для указания порядка построения термов и формул. Например, формулы

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow C \quad \text{и} \quad A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$$

имеют р а з н ы й смысл. Существуют правила, позволяющие избегать излишне большого числа скобок. Например, по аналогии с правилом, по которому умножение делается ранее сложения, можно условиться, что при отсутствии скобок *конъюнкция формул выполняется до дизъюнкции*, и писать

$$(A \wedge B) \vee (C \wedge D)$$

просто в виде

$$A \wedge B \vee C \wedge D.$$

Но, не владея четкими правилами, всегда лучше поставить избыточные скобки, чем сделать свои записи двусмысленными.

РАЗДЕЛ III

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ

1. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И КОМБИНАТОРИКУ

1.1. Перестановки

Две буквы А и Б можно расположить одну за другой двумя способами:

АБ, БА.

Три буквы А, Б и В можно расположить в виде последовательности уже шестью способами:

АБВ, АВБ,
БАВ, БВА,
ВАБ, ВБА.

Для четырех букв получим 24 разных способа их расположения в виде последовательности:

АБВГ, АБГВ, БАВГ, БАГВ,
АВБГ, АВГБ, БВАГ, БВГА,
АГБВ, АГВБ, БГАВ, БГВА,
ВАБГ, ВАГБ, ГАБВ, ГАВБ,
ВБАГ, ВБГА, ГБАВ, ГБВА,
ВГАБ, ВГБА, ГВАБ, ГВБА.

Сколькими способами можно расположить в последовательность десять букв? Перебрать все способы расположения здесь было бы трудно. Для ответа на вопрос желательно общее правило, формула, которая позволяла бы сразу вычислить число способов расположения в виде последовательности n букв. Число этих способов обозначают $n!$ (n с восклицательным знаком) и называют «n факториал». Мы уже видели, что

$$2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24,$$

Каждый способ расположения данного числа букв в последовательность называется **перестановкой**. Очевидно, что вместо букв можно взять цифры или любые другие предметы. Число перестановок четырех предметов равно $4! = 24$. Вообще $n!$ есть число перестановок n предметов. Заметим еще, что полагают

$$1! = 1$$

(один предмет не с чем «переставлять», из одного предмета можно сформировать только одну «последовательность», в которой этот предмет стоит на первом месте). Итак,

$$1! = 1,$$
$$2! = 1 \cdot 2 = 2,$$
$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6,$$
$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Напрашивается **гипотеза**: *число перестановок n предметов равно произведению первых n натуральных чисел*:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n, \qquad (1)$$

Гипотеза эта верна.

Для доказательства заметим, что в случае n предметов на первое место можно поставить любой из n предметов. В каждом из этих n случаев остающиеся $n - 1$ предметов можно расположить $(n - 1)!$ способами. Поэтому получим всего $(n - 1)!\, n$ способов расположения n предметов:

$$n! = (n - 1)! \cdot n. \qquad (2)$$

При помощи формулы (2) получаем последовательно

$$2! = 1! \cdot 2 = 1 \cdot 2$$
$$3! = 2! \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3,$$
$$4! = 3! \cdot 4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4,$$
$$5! = 4! \cdot 5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 \text{ и т. д.}$$

Знакомые с принципом математической индукции могут заметить, что вывод формулы (1) из формулы (2) использует этот принцип, и провести строго формальное рассуждение.

Теперь уже нетрудно вычислить число перестановок десяти букв:

$$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3\,628\,800.$$

1.2. Вероятность

Семь букв разрезной азбуки А, А, Б, Б, К, У, Ш положены в мешок, откуда их вынимают наудачу и располагают одна за другой в порядке, в котором они появляются. В результате получается слово БАБУШКА.

В какой мере такой факт надо считать удивительным, быть может, заставляющим предполагать, что мы присутствуем при нарочно подстроенном фокусе? Занумеруем наши семь карточек с буквами:

1	2	3	4	5	6	7
А	А	Б	Б	К	У	Ш

Их можно расположить по порядку

$$7! = 5040$$

способами. Из этих 5040 случаев слово БАБУШКА получится в четырех:

3	1	4	6	7	5	2		4	1	3	6	7	5	2
Б	А	Б	У	Ш	К	А		Б	А	Б	У	Ш	К	А
3	2	4	6	7	5	1		4	2	3	6	7	5	1
Б	А	Б	У	Ш	К	А		Б	А	Б	У	Ш	К	А

Говорят, что из общего числа случаев 5040 четыре случая *благоприятствуют* появлению занимающего нас события (заключающегося в том, что из вынутых букв сложилось слово БАБУШКА). *Отношение числа благоприятствующих случаев к общему числу случаев* в подобных задачах *называют вероятностью события.* В нашем случае вероятность появления слова БАБУШКА есть

$$P = \frac{4}{5040} = \frac{1}{1260}.$$

Вероятность очень мала, и наше событие действительно очень «маловероятно». Позднее мы узнаем, что подсчитанная нами вероятность имеет такой практический смысл: если много раз производить описанный опыт с буквами, то примерно один раз на 1260 испытаний произойдет наше событие (само собою сложится слово БАБУШКА).

Аналогичный расчет для четырех букв А, А, М, М, приводит к результату, что из них случайно будет складываться слово МАМА с вероятностью

$$\frac{4}{4!} = \frac{1}{6}.$$

С такой же вероятностью 1/6 будет получаться еще каждое из пяти «слов»:

ААММ, АМАМ, АММА, ММАА.

Если производить этот опыт с четырьмя буквами, то каждый из описанных шести возможных результатов будет появляться примерно в 1/6 доле случаев.

1.3. Равновозможные случаи

Игральная кость — это кубик, на гранях которого обозначено число очков от 1 до 6. Выбросив две кости, можно получить сумму очков на верхних гранях двух костей от 2 до 12. Можно было бы думать, что в задаче имеется 11 возможных случаев и вероятность появления каждого из них равна 1/11. Но это не так. Опыт показывает, что, например, сумма 7 появляется много чаще, чем сумма 12. Это и понятно, так как 12 можно получить только в виде

$$6 + 6 = 12,$$

а 7 многими способами:

$$1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4 = 4 + 3 = 5 + 2 = 6 + 1 = 7.$$

При этом мы записываем первым слагаемым число очков на первой кости, а вторым — на второй. Поэтому записи $1 + 6$ и $6 + 1$ указывают на две различные возможности получения суммы 7.

В основу подсчета вероятностей здесь приходится положить рассмотрение тридцати шести случаев, каждый из которых характеризуется определенным числом очков, выпавших на первой кости, и определенным числом очков, выпавших на второй кости:

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Представляется естественным считать эти тридцать шесть случаев *равновозможными*. Опыт показывает, что в случае достаточно правильных кубических костей, сделанных из однородного материала, и надлежащих приемов бросания (например, после встряхивания в стаканчике)

эти 36 случаев появляются при большом числе повторений примерно одинаково часто.

Для суммы очков на двух костях получаем такие результаты (проверьте):

Сумма	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Число благоприятствующих случаев	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
Вероятность	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Уточнение: *вероятностью называется отношение числа благоприятствующих случаев к общему числу равновозможных.*

Какие случаи можно считать равновозможными? На этот вопрос математика не дает ответа. В случае бросания костей физически существенные условия падения кости любой из шести граней кверху представляются нам одинаковыми. Кроме того, представляется естественным считать, что различные комбинации верхних граней двух костей тоже одинаково правдоподобны. Опыт подтверждает эти предположения.

Но разделение всех возможных исходов испытания на исключающие друг друга равновозможные случаи достаточно деликатно. Часто же вместо изложенного сейчас «классического» определения вероятности приходится прибегать к другому — «статистическому». Но на первых порах знакомства с теорией вероятностей разумно отнестись с доверием к «классическому» определению. С точки зрения чистой математики тут нет никакой «нестрогости». Математическая теория вероятностей занимается только вычислением вероятностей различных событий (например, выпадения на двух костях суммы очков 7) при определенных допущениях — в занимающих нас задачах допущениях о том, какие случаи надо считать равновозможными.

1.4. Броуновское движение и задача о блуждании по плоскости

Вычислять вероятности приходится отнюдь не только при решении шуточных задач об игре в карты. В частности, на теории вероятностей основаны кинетическая теория газов, теория диффузии растворенных

в жидкости веществ и взвешенных частиц. Она объясняет, почему хаотическое, беспорядочное движение отдельных молекул приводит к четким, простым закономерностям движения их больших совокупностей.

Первая возможность экспериментального исследования такого рода соотношений между беспорядочным движением отдельных частиц и закономерным движением

Рис. 62

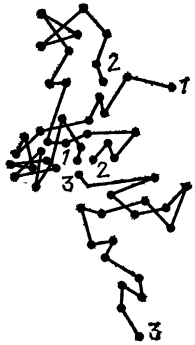


Рис. 63

их больших совокупностей появилась, когда в 1827 г. ботаник Р. Броун открыл явление, которое по его имени названо *броуновским движением*. Броун наблюдал под микроскопом взвешенную в воде цветочную пыльцу. К своему удивлению, он обнаружил, что взвешенные в воде частицы пыльцы находятся в непрерывном беспорядочном движении, которое не удается прекратить при самом тщательном старании устранить какие-либо внешние воздействия, способные это движение поддержать (например, вызвать движение самой воды под влиянием неравномерности температуры и т. п.). Вскоре было обнаружено, что это общее свойство любых достаточно мелких частиц, взвешенных в жидкости. Его интенсивность зависит только от температуры и вязкости жидкости и от размеров частиц (движение тем интенсивнее, чем температура выше, вязкость меньше, а частицы мельче). Каждая частица движется по своей собственной траектории, не похожей на траектории соседних частиц, так что близкие вначале частицы очень быстро становятся удаленными (хотя могут иногда случайно вновь встретиться).

На рис. 62 точками отмечены последовательные положения частицы (гуммигута в воде по классическим

опытам Ж. Перрена) с промежутками в 30 с. Эти последовательные положения соединены прямолинейными отрезками. В действительности траектория частицы еще запутаннее. На рис. 63 схематически показано, что траектории частиц, которые в начальный момент были очень близки друг к другу, совершенно различны.

Броуновское движение большого числа частиц можно наблюдать, выпустив в тонкий слой воды на плоском стеклышке каплю чернил. При наблюдении простым глазом траектории отдельных частиц увидеть нельзя. Чернильное пятно будет постепенно расплываться, сохраняя округлую форму. Его краска будет более интенсивной в центре, к краям же будет ослабевать. Схематически расположение большого числа частиц, подверженных броуновскому движению, через некоторый промежуток

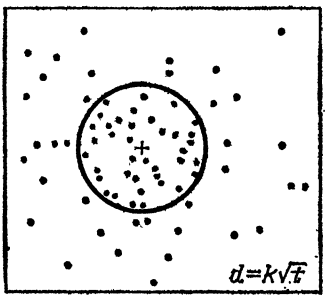


Рис. 64

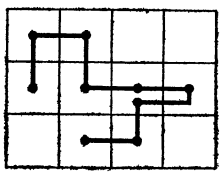


Рис. 65

времени после того, как они все вышли из ближайшей окрестности начальной точки, отмеченной крестиком, изображено на рис. 64.

Обозначим через t промежуток времени, прошедший от выхода наших частиц из начальной точки, и через d — диаметр окружности с центром в начальной точке, внутри которой находится половина частиц (см. рис. 61). Наблюдение показывает, что этот диаметр *растет приблизительно пропорционально квадратному корню из промежутка времени* t, т. е. изменяется примерно по закону

$$d = k\sqrt{t}. \qquad (1)$$

Эта закономерность может быть обоснована теоретически средствами теории вероятностей. Сам ее вывод остается за пределами школьного курса, но в причинах того, что диаметр d растет *не пропорционально времени* (как было бы, если бы частицы разбегались из начальной точки

с постоянной скоростью, не меняя направления), *а несравненно медленнее*, мы вскоре сможем разобраться.

Основные черты броуновского движения частицы можно наблюдать уже на упрощенной модели блуждания частицы по плоскости, разделенной на квадратики. К таким упрощенным моделям при изучении более сложных явлений прибегают и в серьезных научных исследованиях.

Будем считать, что наша частица перемещается отдельными шагами и за один шаг переходит из квадратика,

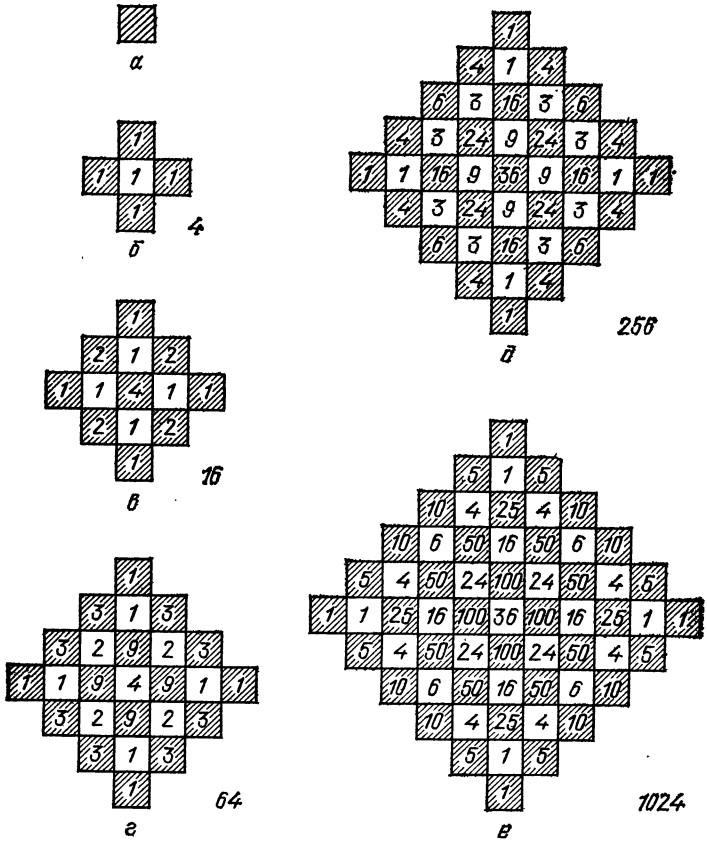


Рис. 66

в котором она находится в начале шага, в один из четырех соседних квадратиков. Ее путь за восемь шагов может, например, иметь такой вид, как указано на рис. 65.

Из начального положения (рис. 66, *а*) частица может попасть в один из четырех смежных квадратиков, в каждый одним-единственным способом (рис. 66, *б*). За два шага частица может попасть в начальное положение *четырьмя* способами (выходя в сторону в одном из четырех возможных направлений и возвращаясь обратно), еще в четыре клетки частица может попасть двумя способами в каждую и в четыре — одним способом в каждую (рис. 66, *в*). Всего частица может двигаться в течение первых двух шагов шестнадцатью различными способами.

На рис. 66, *г* указан результат аналогичного подсчета для трех шагов. Здесь число различных путей равно уже

$$4 \cdot 9 + 8 \cdot 3 + 4 = 64.$$

На рис. 66, *д* и 66, *е* указано число способов попадания в различные клетки после четырех и пяти шагов. Легко понять, что число различных путей с ростом числа шагов t растет как 4^t:

Число шагов	0	1	2	3	4	5
Число путей	1	4	16	64	256	1024

Если считать, что частица всегда помещается в центре занимаемого ею квадратика, то за t шагов она может удалиться от начального положения не более чем на расстояние th, где h — длина стороны квадратиков. Но для этого она должна двигаться прямолинейно. При $t = 5$ это будет только в *четырех* случаях из 1024. В большинстве же случаев частица окажется в конце пути значительно ближе к своему начальному положению. Например, при $t = 5$ в 400 случаях (почти 40%) расстояние конечного положения от начального будет равно единице, а еще в 400 случаях это расстояние равно

$$\sqrt{3} = 1{,}73\ldots$$

Лишь в остающихся немного более чем 20% случаев частица уйдет дальше.

Допустим теперь, что при любом t все возможные пути нашей частицы *равновозможны*. Тогда числа, проставленные на рис. 66, после их деления на 4^t дадут вероятности попадания в соответствующие клетки после t шагов. Обозначив через r расстояние от начального положения, получим при $t = 2$ такую табличку:

r^2	0	2	4
r	0	$\sqrt{2}$	2
Число случаев	4	8	4
Вероятность	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

При $t = 5$ табличка приобретает следующий вид:

r^2	1	5	9	13	17	25
r	1	$\sqrt{5}$	3	$\sqrt{13}$	$\sqrt{17}$	5
Число случаев	400	400	100	80	40	4
Вероятность	$\frac{400}{1024}$	$\frac{400}{1024}$	$\frac{100}{1024}$	$\frac{80}{1024}$	$\frac{40}{1024}$	$\frac{4}{1024}$

Интересно подсчитать *среднее значение квадрата расстояния* (черта в статистике — знак осреднения):

$$\text{при } t = 2 \quad \overline{r^2} = \frac{8 \cdot 2 + 4 \cdot 4}{16} = 2, \qquad \text{при } t = 5 \quad \overline{r^2} = 5.$$

Можно доказать, что при любом t в нашей задаче $\overline{r^2} = t$. Корень квадратный из среднего значения квадрата называется в статистике *средним квадратическим*. Оно в нашей задаче равно $\sqrt{t}$.

На этом пока мы закончим исследование нашей задачи. Заметим только, что рис. 66, *е* уже обнаруживает большое сходство с рис. 64. Как уже говорилось, при большом числе испытаний частота появления какого-либо исхода примерно пропорциональна вероятности (здесь надо было бы сказать: при большом числе *независимых* испытаний; с точным смыслом выражения «независимые испытания» вы познакомитесь позднее). Оказывается, что наша модель случайного блуждания отдельной частицы хорошо соответствует наблюдениям, если предположить, что частицы блуждают независимо друг от друга.

1.5. Блуждание по прямой. Треугольник Паскаля

Рассмотрим еще более простую задачу блуждания по прямой. За один шаг частица продвинется на расстояние h вверх либо на то же расстояние вниз. Горизонтальную ось теперь удобно использовать для того, чтобы по ней откладывать число шагов. На рис. 67 изображен возможный график движения частицы.

Легко понять, что в этой задаче число возможных способов перемещения частицы за один шаг будет равно 2.

На рис. 68 подсчитано число способов, которыми можно попасть через t шагов в то или иное положение (на ту или иную высоту).

Блуждание такого рода осуществляется в специальном приборе, который называют *доской Гальтона*. На рис. 69 изображена схема возможного устройства этого прибора. Металлические шарики один за другим попадают в самый верхний канал. Наткнувшись на первое острие, они должны выбрать путь направо либо налево. Затем происходит второй такой выбор и т. д. При

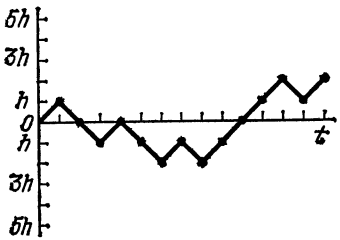
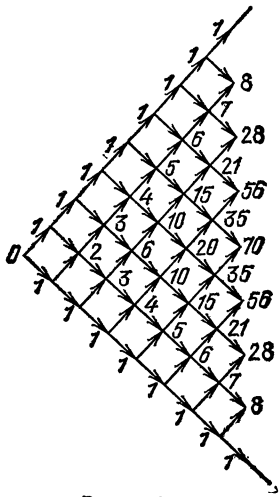


Рис. 67


0
1
1
1

Закон образования таблицы ясен: *в каждой клетке стоит сумма числа, стоящего непосредственно сверху, и числа, стоящего сверху слева.* Например:

$$56 = 21 + 35.$$

Отдельно приходится оговорить, что в нулевом столбце и по диагонали стоят единицы. Можно поступить иначе и считать, что таблица продолжается неограниченно влево и вправо, но заполнена там нулями. Ее начало будет тогда иметь вид

		$\longrightarrow m$							
		...	−2	−1	0	1	2	3	4...
↓	0	...	0	0	1	0	0	0	0...
	1	...	0	0	1	1	0	0	0...
n	2	...	0	0	1	2	1	0	0...

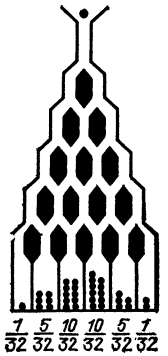


Рис. 69

Теперь основное правило заполнения таблицы будет действовать без всяких исключений, начиная с первой строки.

Обозначив через C_n^m число, стоящее в таблице на пересечении m-го столбца и n-й строки, можно записать правило заполнения таблицы в виде формулы

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m. \qquad (1)$$

Особо надо задать числа нулевой строки:

$$C_0^m = \begin{cases} 1 & \text{при } m = 0, \\ 0 & \text{при остальных значениях } m. \end{cases}$$

Наша таблица (без заполнения клеток, где все равно стоят нули) называется *треугольником Паскаля.*

Вернемся к задаче о блуждании по прямой, но изменим ее постановку. Пусть частица двигается по горизонтальной прямой и каждую секунду либо делает один шаг вправо (на какое-либо фиксированное расстояние h), либо остается на месте. За n секунд частица сдвинется не более чем на n шагов. Но возникает вопрос о том, какое число шагов за n секунд будет наиболее вероятным, если считать все возможные варианты движения равновозможными. Ведь ясно, что крайние случаи (0 шагов и n шагов) при большом числе шагов появятся лишь в виде крайне редких исключений.

Учитывая все сказанное выше, вы без труда докажете, что вероятность сделать m шагов за первые n секунд в нашей задаче равна

$$P_n(m) = \frac{C_n^m}{2^n}. \qquad (2)$$

На рис. 70 даны графики функций $P_n(m)$ от m при $n = 1, 2, 4, 8, 16, 32$. Масштаб по горизонтальной оси выбран постепенно уменьшающимся, так что максимальный

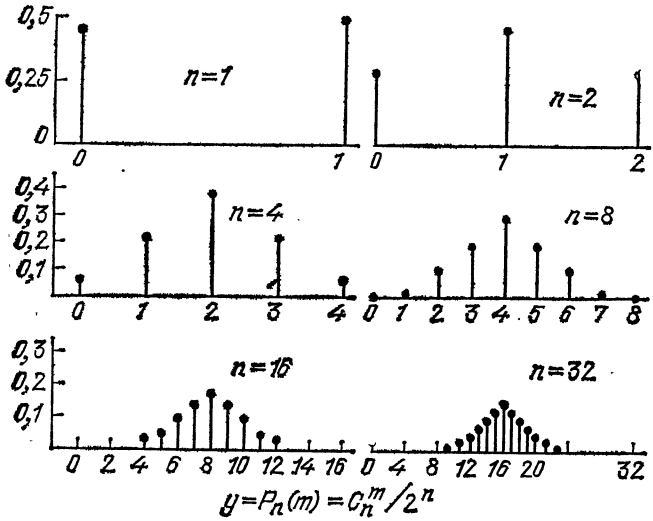


Рис. 70

возможный пробег частицы все время изображается отрезком одной и той же длины. Масштаб по вертикальной оси, где откладываются вероятности, сохраняется неизменным.

Мы видим, что наиболее вероятным все время является среднее значение пробега

$$\bar{x} = \frac{1}{2} n.$$

Большие же отклонения от этого среднего с возрастанием n делаются все более редкими. Можно доказать, что *среднее квадратическое отклонение от среднего пробега в этой задаче равно*

$$\frac{1}{2}\sqrt{n}.$$

Например, за 10 000 секунд средний пробег будет 5000 шагов, а среднее квадратическое отклонение от этого среднего будет лишь 50 шагов. Здесь мы соприкасаемся с одним из фундаментальных предложений теории вероятностей — закономбольших чисел, о котором речь будет в конце изучаемой сейчас темы.

1.6. Бином Ньютона

Числа C_n^m называют *биномиальными коэффициентами*. При этом имеют в виду их употребление в алгебре, не связанное с теорией вероятностей и задачами о блужданиях. Вам известны формулы

$$(a+b)^0 = 1,$$
$$(a+b)^1 = a+b,$$
$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Сразу обращает на себя внимание то обстоятельство, что числовые коэффициенты взяты из соответствующих строк треугольника Паскаля.

Вычислим еще:

$$(a+b)^4 = (a+b)^3\cdot(a+b).$$

Для этого надо умножить

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

на a и на b и результаты сложить:

$$\begin{array}{r} a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3 \\ +\quad a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4 \\ \hline a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4. \end{array}$$

Мы видим, что коэффициенты суммы получаются точно по тому закону, по какому формировался треугольник Паскаля.

Возникает гипотеза, что всегда

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1a^{n-1}b + \ldots + C_n^m a^{n-m}b^m + \ldots + b^n. \quad (1)$$

Гипотеза верна. Знакомые с принципом математической индукции могут провести строгое доказательство формулы бинома Ньютона (1), опираясь на равенство (1) из п. 1,5.

1.7. Биномиальные коэффициенты и число сочетаний

Числом сочетаний из n по m называется число способов выделения из множества, состоящего из n предметов, подмножества, состоящего из m предметов. Например, из множества, состоящего из четырех букв

А, Б, В, Г,

можно выделить шесть различных множеств, состоящих каждое из двух букв

{А, Б}, {А, В}, {А, Г}, {Б, В}, {Б, Г}, {В, Г}.

Оказывается, что число сочетаний из n по m равно соответствующему элементу треугольника Паскаля C_n^m.

Этот факт легко понять, если обратиться к последней задаче о блуждании из п. 1.5. Например, чтобы определить число различных способов, которыми в этой задаче частица может сделать два шага направо за 4 секунды, надо перебрать все способы выделения из четырех секундных промежутков двух промежутков. Таких способов *шесть*:

	1	2	3	4
1	+	+		
2	+		+	
3	+			+
4		+	+	
5		+		+
6			+	+

Знакомые с методом математической индукции могут провести общее доказательство, опираясь на равенство (1) из п. 1.5.

1.8. Формула, выражающая биномиальные коэффициенты через факториалы, и ее применение к вычислению вероятностей

Эта замечательная формула имеет вид

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\,. \qquad (1)$$

Ее тоже можно доказать при помощи метода математической индукции. Дадим другое, более непосредственное доказательство.

Если из n предметов отобраны m, то можно $m!$ способами занумеровать отобранные предметы номерами

$$1, 2, 3, \ldots, m.$$

Оставшиеся $n - m$ предметов можно занумеровать номерами

$$m + 1, m + 2, \ldots, n$$

$(n - m)!$ способами. Таким образом, получим

$$m!\,(n - m)!$$

нумераций номерами

$$1, 2, \ldots, n$$

всего множества из n предметов. Но сам отбор m элементов из n можно произвести C_n^m способами. Таким образом, всего мы получим

$$C_n^m \cdot m!\,(n - m)!$$

нумераций полного множества из n элементов. Каждую нумерацию этого множества мы получили р о в н о о д и н р а з. Всего же их $n!$. Поэтому

$$C_n^m m!\,(n - m)! = n!,$$

откуда

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n - m)!},$$

что и требовалось доказать.

Чтобы формула (1) была верна и при $n = 0$ и при $m = 0$, надо положить

$$0! = 1.$$

Формула (1) позволяет вычислять C_n^m в случае больших n и m при помощи таблицы логарифмов факториалов.

Вычислим, например, в задаче из конца п. 1.5 вероятность сделать за 100 секунд ровно 50 шагов. Эта вероятность равна

$$P_{100}(50) = \frac{C_{100}^{50}}{2^{100}} = \frac{100!}{2^{100}(50!)^2}.$$

Логарифмические вычисления не сложны:

$$\lg(100!) = 157,9700, \quad \lg 2 = 0,3010300,$$
$$\lg 2^{100} = 30,1030, \quad \lg(50!) = 64,4831,$$
$$\lg(50!)^2 = 128,9662,$$
$$\lg P_{100}(50) = \bar{2},9008, \quad P_{100}(50) = 0,0796 \approx 0,08.$$

1.9. Заключительные замечания

Подбор дополнительных примеров на непосредственное вычисление вероятностей при помощи благоприятствующих случаев, я надеюсь, не представит затруднений. Хочется лишь обратить внимание на общеобразовательный интерес задач, относящихся к большому числу испытаний. Наука справляется с такими задачами при помощи предельных теорем, рекомендуя для практики асимптотические формулы (нормальное приближение к биномиальному распределению и т. д.). Но в школе об этих предельных закономерностях приходится только рассказывать в обзорном порядке. Тем более важно соприкоснуться с их проявлением на таких задачах, как фактическое вычисление биномиального распределения при большом числе испытаний.

При ознакомлении с теорией вероятностей постепенное расширение проблематики с возможно более ранним подчеркиванием тех сторон дела, которыми определяется значение теории вероятностей в естествознании, технике и общественных науках, представляется особенно существенным. Из области биологии легко поддаются введению в школьную практику задачи на применение законов Менделя. Из применений к общественным наукам на первое место следует поставить знакомство с основами выборочного метода при экономических и социологических исследованиях.

2. ПОЛУЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ СЕТКИ

2.1. В статье «Экспонента», опубликованной в двенадцатом номере «Кванта» за 1972 год, было показано, что многие величины меняются во времени так, что скорость их изменения пропорциональна уже достигнутому ими значению. Общий вид такой показательной зависимости y от t записывается формулой

$$y = y_0 a^t, \tag{1}$$

где y_0 — значение величины y при $t = 0$. Положив

$$k = \lg a, \quad z = \lg y, \quad b = \lg y_0,$$

из (1) получаем $z = kt + b$.

Мы видим, что зависимость z от t линейна. Ее график есть прямая линия. Начертив обычным способом этот график, мы можем на оси z (или на парал-

лельной ей прямой) поставить отметки соответствующих значений $y = 10^z$. Тогда по нашему прямолинейному графику можно будет при любом заданном t непосредственно считывать значения y. На рис. 71 такой способ графического изображения применен к функциям $y = 100^t$ и

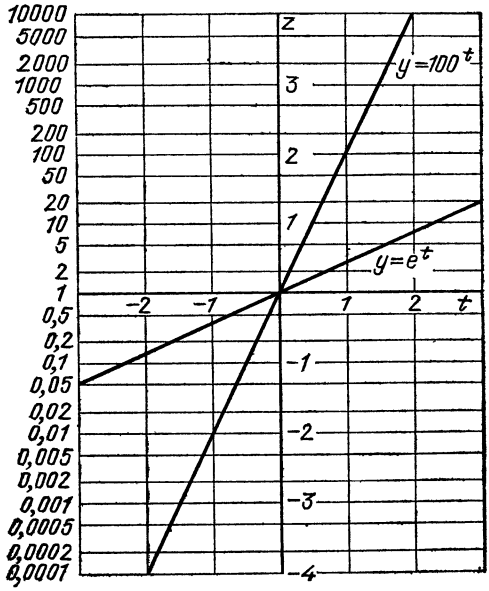


Рис. 71

$y = e^t$ ($e = 2{,}718\ldots$). Их графики в декартовой системе координат изображены на рис. 72.

В магазинах продается полулогарифмическая бумага. На этой бумаге вертикальные линии проведены с промежутками в 1 мм, как на обычной миллиметровой бумаге, горизонтальные же линии проведены так, что их расстояние от нижней кромки равно $100 \lg y$, где y принимает значения

1; 1,05; 1,10; 1,15; . . .
2; 2,1; 2,2; 2,3; . . .

и т. д. (разберитесь по рис. 73, как устроена эта шкала!). В нижней части рис. 73 показано, как построить на полулогарифмической бумаге графики функций вида (1) по двум точкам ($t = 0$, $y = y_0$), ($t = 1$, $y = y_0 a$).

На полулогарифмической бумаге приращению $\Delta t = 1$ соответствует 10 см. Такой же масштаб мы выбрали на рис. 73 по оси y. Поэтому угловой коэффициент наших графиков равен $k = \lg a$. Это не что иное, как относительная скорость изменения y при изменении t:

$$\frac{1}{y}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y'}{y} = \lg a = k$$

(здесь y' — производная функции $y = f(t) = y_0 a^t$). Если масштаб по оси y выбран иначе, то нужен пересчет, с которым вы легко справитесь самостоятельно.

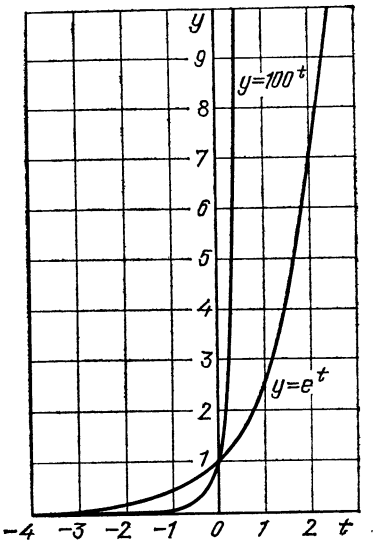


Рис. 72

Графики на полулогарифмической бумаге вычерчивают, когда требуется выяснить, можно ли заданную таблицей зависимость $y = f(t)$ хотя бы приближенно считать подчиняющейся закону показательного роста (или убывания). Рассмотрим в виде примера объем промышленной продукции в СССР, выраженной в процентах к продукции 1940 года:

1937	1940	1945	1950	1955	1960	1965	1970
77	100	92	173	320	524	791	1190

Полулогарифмический график дан на рис. 74 (график в натуральном масштабе по вертикали вы можете для сравнения вычертить сами). По графику видно, что, за исключением военного пятилетия 1940—1945 годов, рост промышленной продукции приблизительно следует показательному закону. Найдите самостоятельно, скольким процентам прироста в год соответствует средний наклон графика. На графике видно, что темпы роста в 1945—1955 годах несколько выше, чем в 1960—1970 годах. Интересно, что, выключив из рассмотрения точки, соответствующие 1945 и 1950 годам, мы получим почти прямую линию: за 1945—1955 годы наша промышленность навер-

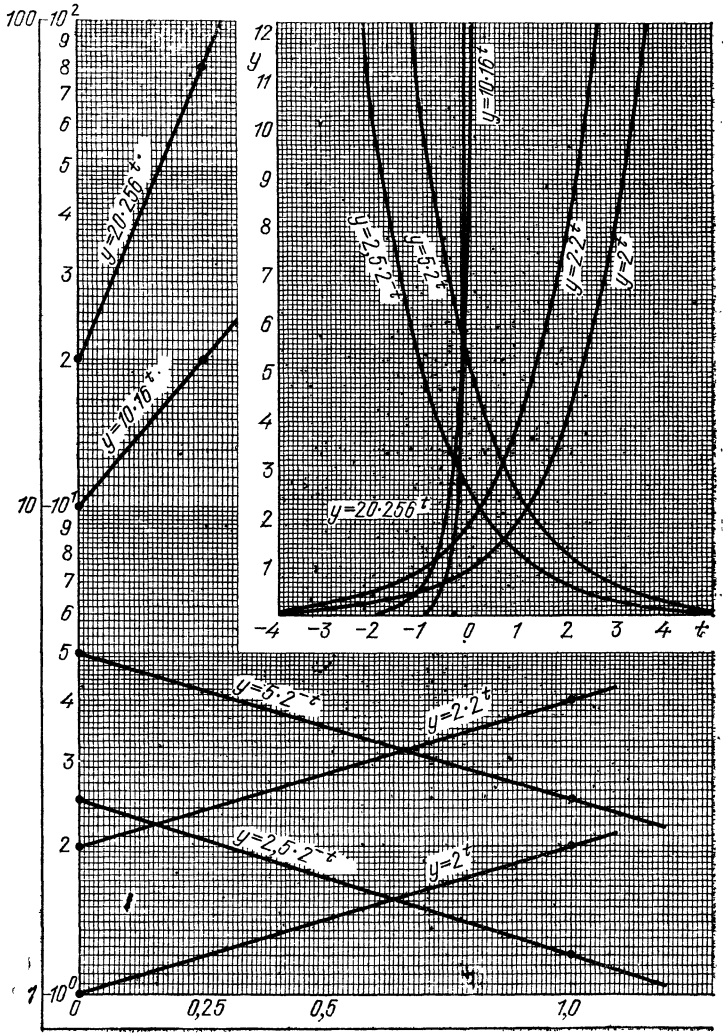

y=20·256^t
y=10·16^t
y=2·2^t
y=2^t
y=5·2^-t
y=2,5·2^-t
y=5·2^-t
y=2·2^t
y=2,5·2^-t
y=2^t
y
t
0
0,25
0,5
1,0

Рис. 73

стала упущенное за время войны. Определите средний годичный прирост продукции за 1937—1970 годы (в процентах за год).

2.2. Понятно, что зависимость вида

$$y = A \lg t + B$$

тоже изображается прямолинейным графиком, если по оси абсцисс откладывать $s = \lg t$, а по оси ординат y.

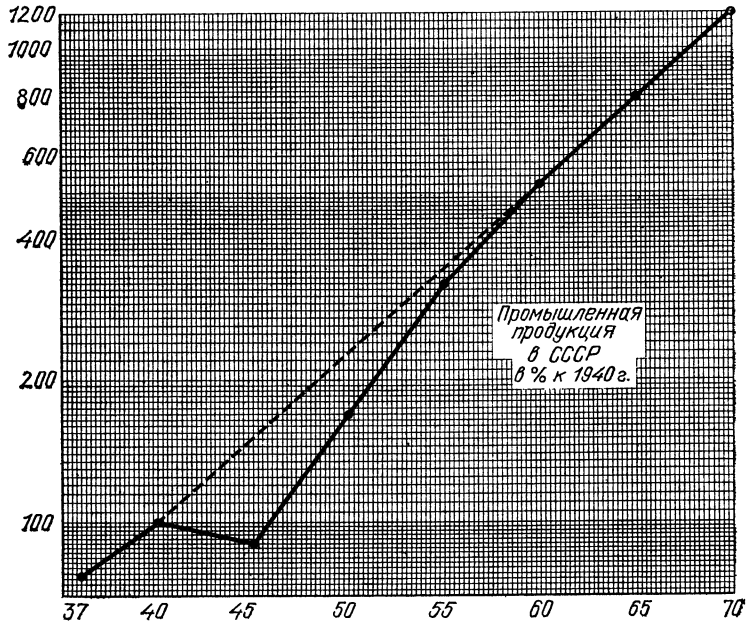


Рис. 74

В виде примера рассмотрим изображенную на рис. 75 зависимость скорости u от расстояния y от стенки при турбулентном течении жидкости вдоль плоской стенки. Здесь δ и u_τ — надлежащим образом выбранные масштабы длин и скоростей. Измерения производились при y/δ, меняющемся в пределах от 10 до 56 000. Поэтому для изображения результатов измерений понадобились три графика с различными масштабами по оси абсцисс. После перехода к логарифмическому масштабу для y/δ все эти данные уместились на одном графике (рис. 76). При этом график «выпрямился». Прямая на рис. 76 задается уравнением

$$\frac{u}{u_\tau} = 5{,}5 + 5{,}75 \lg\left(\frac{y}{\delta}\right). \qquad (2)$$

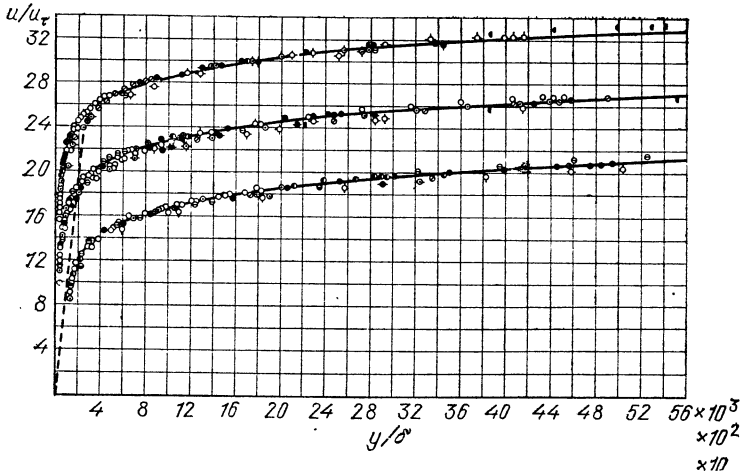


Рис. 75

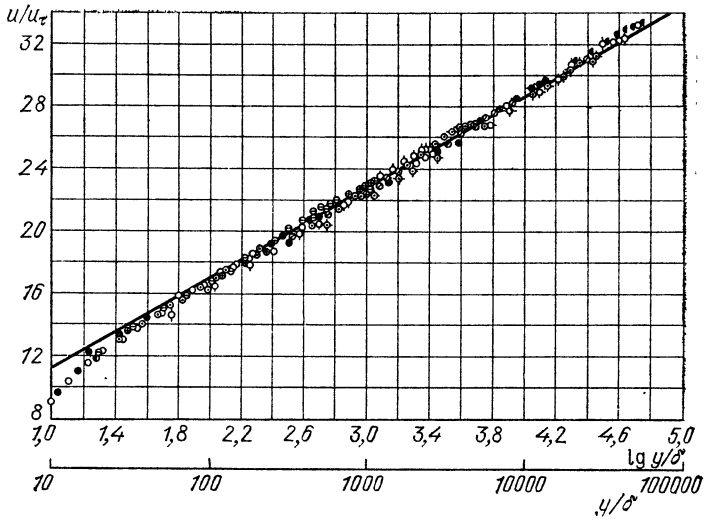


Рис. 76

Мы видим, что эта закономерность очень точно соблюдается, начиная с $y/\delta = 100$. При меньших y/δ заметны систематические отклонения, а при $y/\delta < 15$ эти отклонения делаются столь значительными, что здесь соотношение (2) надо признать совсем негодным.

2.3. Зависимости вида

$$y = ct^{\alpha} \tag{3}$$

тоже «выпрямляются» при переходе к переменным

$$s = \lg t, \quad z = \lg y.$$

В самом деле, из (1) вытекает

$$z = \alpha s + b, \tag{4}$$

где $b = \lg c$. Для изображения зависимостей вида (3) прямолинейными графиками пользуются логарифмической сеткой. Логарифмическая бумага тоже

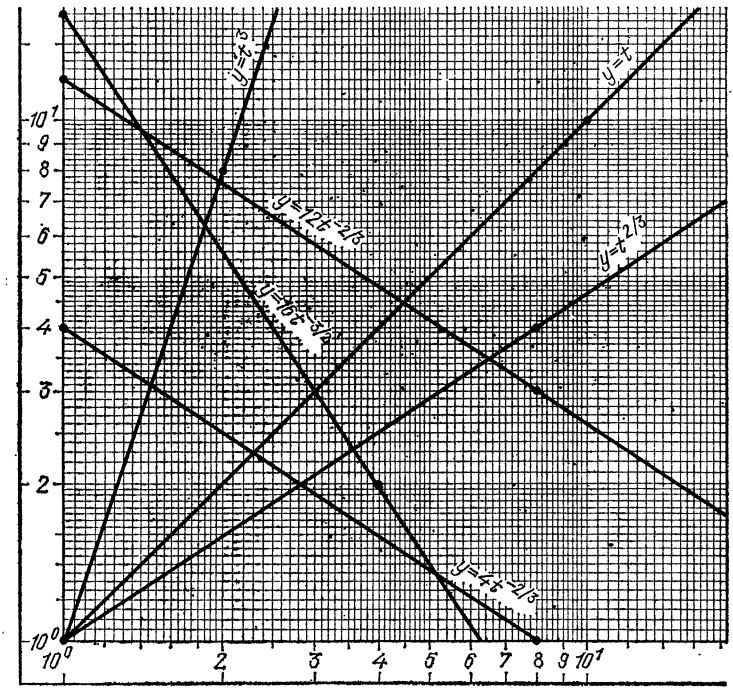


Рис. 77

продается в магазинах. На рис. 77 даны примеры графиков на логарифмической бумаге. Легко понять, что угловой коэффициент графиков здесь равен α.

Графики на логарифмической сетке вычерчивают, если есть основания думать, что какая-либо эмпирическая

зависимость приближенно следует закону вида (3). На рис. 78 на логарифмической сетке нанесены эмпирические данные о распределении энергии пульсации в турбулентном потоке. Здесь $E(k)$ — спектральная плотность

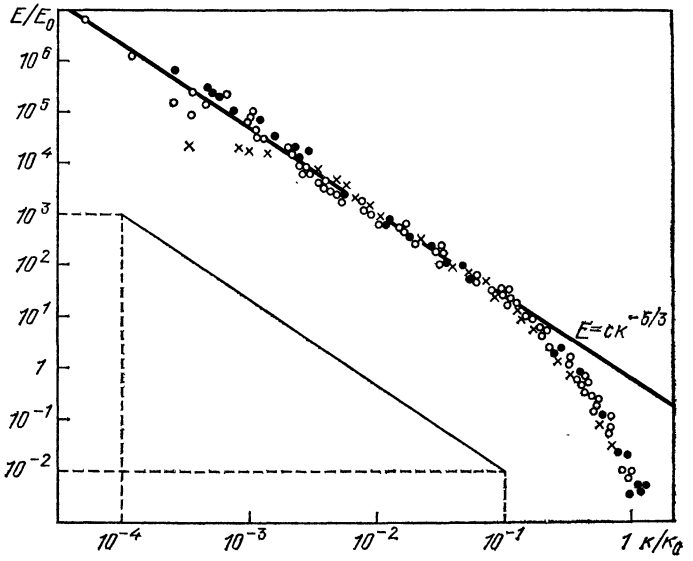


Рис. 78

энергии пульсаций, соответствующая частоте k; E_0 и k_0 — условные единицы для E и k. Мы видим, что при

$$10^{-4}k_0 \leqslant k \leqslant 10^{-1}k_0$$

наша зависимость хорошо выражается формулой вида

$$E = ck^{-5/3},$$

которая из теоретических соображений была предложена А. М. Обуховым.

Здесь масштабы для $\lg k$ и $\lg E$ разные. Поэтому угловой коэффициент графика, соответствующего заданному α, не равен α. На рисунке показано, как графически строится прямая с наклоном, соответствующим $\alpha = 5/3$.

З а д а ч а. Изобразите на полулогарифмической бумаге данные таблицы о росте продукции промышленности СССР по двум группам: группа А — производство средств производства, группа Б — производство предметов потребления (в процентах к 1913 году).

В какие годы рост продукции по группе А *обогнал рост продукции по группе* Б *и в какие годы они шли наравне? Сравните особенности военных лет первой и второй мировых войн.*

Замечание. Во всей промышленной продукции группа А в 1913 году составляла 35,1%, а в 1970 году 74,8%.

Год	Группа А	Группа Б	Год	Группа А	Группа Б
1913	100	100	1945	1 504	273
1917	81	67	1950	2 746	566
1928	155	120	1955	5 223	996
1932	424	187	1960	14 156	1498
1937	1013	373	1965	8 936	2032
1940	1340	460	1970	21 359	3281

3. ВЕЛИЧИНА И ЕЕ ИЗМЕРЕНИЕ

Величина — одно из основных математических понятий, смысл которого с развитием математики подвергался ряду обобщений.

3.1. Еще в «Началах» Евклида (3 в. до н. э.) были отчетливо сформулированы свойства величин, называемых теперь, для отличия от дальнейших обобщений, положительными скалярными величинами. Это первоначальное понятие величины является непосредственным обобщением более конкретных понятий: длины, площади, объема, массы и т. п. Каждый конкретный род величин связан с определенным способом сравнения физических тел или других объектов. Например, в геометрии отрезки сравниваются при помощи наложения, и это сравнение приводит к понятию длины: два отрезка имеют одну и ту же длину, если при наложении они совпадают; если же один отрезок накладывается на часть другого, не покрывая его целиком, то длина первого меньше длины второго. Общеизвестны более сложные приемы, необходимые для сравнения плоских фигур по площади или пространственных тел по объему.

В соответствии со сказанным, в пределах системы всех однородных величин (т. е. в пределах всех длин или всех площадей, всех объемов) устанавливается отношение неравенства: две величины a и b одного и того же рода или совпадают ($a = b$), или первая меньше второй ($a < b$), или вторая меньше первой ($b < a$). Общеизвестно также в случае длин, площадей, объемов и т. д., каким образом устанавливается для каждого рода величин смысл операции сложения. В пределах каждой из рассматриваемых систем однородных величин отношение $a < b$ и операция $a + b = c$ обладают следующими свойствами:

1) *каковы бы ни были* a *и* b, *имеет место одно и только одно из трех соотношений: или* $a = b$, *или* $a < b$, *или* $b < a$;

2) *если* $a < b$ *и* $b < c$, *то* $a < c$ (*транзитивность отношений «меньше», «больше»*):

3) *для любых двух величин* a *и* b *существует однозначно определенная величина* $c = a + b$;

4) $a + b = b + a$ (*коммутативность сложения*);

5) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (*ассоциативность сложения*):

6) $a + b > a$ (*монотонность сложения*);

7) *если* $a > b$, *то существует одна и только одна величина* c, *для которой* $b + c = a$ (*возможность вычитания*);

8) *каковы бы ни были величина* a *и натуральное число* n, *существует такая величина* b, *что* $nb = a$ (*возможность деления*);

9) *каковы бы ни были величины* a *и* b, *существует такое натуральное число* n, *что* $a < nb$.

Это свойство называется аксиомой Евдокса или аксиомой Архимеда. На нем вместе с более элементарными свойствами 1—8 основана теория измерения величин, развитая древнегреческими математиками.

Если взять какую-либо длину l за единичную, то система s' всех длин, находящихся в *рациональном* отношении к l, удовлетворяет требованиям 1—9. Существование *несоизмеримых* отрезков (открытие которых приписывается Пифагору, 6 в. до н. э.) показывает, что система s' еще не охватывает системы s всех вообще длин.

Чтобы получить вполне законченную теорию величин, к требованиям 1—9 надо присоединить еще ту или иную дополнительную аксиому непрерывности, например

10) *если последовательности величин* $a_1 < a_2 < \ldots \ldots < a_n < \ldots < b_n < \ldots < b_2 < b_1$ *обладают тем свойством, что* $b_n - a_n < c$ *для любой величины* c *при достаточно большом номере* n, *то существует единственная величина* x, *которая больше всех* a_n *и меньше всех* b_n.

Свойства 1—10 и определяют полностью современное понятие системы положительных скалярных величин. Если в такой системе выбрать какую-либо величину l за единицу измерения, то все остальные величины системы однозначно представляются в виде $a = \alpha l$, где α — положительное действительное число.

3.2. Измерение скалярных величин. В математической теории измерения отвлекаются от ограниченной точности физических измерений. Задача измерения величины a при помощи единицы меры l состоит в нахождении числового множителя α в равенстве

$$a = \alpha l; \tag{1}$$

при этом a и l считаются положительными скалярными величинами одного и того же рода, а множитель α — положительное действительное число, которое может быть как рациональным, так и иррациональным. Для рационального $\alpha = m/n$ (m и n — натуральные числа) равенство (1) имеет весьма простой смысл: оно означает, что *существует такая величина t (n-я доля от l), которая, будучи взята слагаемым n раз, дает l, будучи же взята слагаемым m раз, дает a: $l = nt$, $a = mt$.* В этом случае величины a и l называются *соизмеримыми.*

Для несоизмеримых величин l и a множитель α иррационален (например, равен числу π, если a есть длина окружности, а l — ее диаметр). В этом случае само определение смысла равенства (1) несколько сложнее. Можно определить его так: равенство (1) обозначает, что для любого рационального числа r

$$\begin{cases} \text{из } \alpha > r \text{ вытекает } a > rl, \\ \text{а из } \alpha < r \text{ вытекает } a < rl. \end{cases} \tag{2}$$

Достаточно потребовать, чтобы условие (2) выполнялось для всех десятичных приближений к α по недостатку и по избытку. Следует отметить, что исторически само понятие иррационального числа возникло из задачи измерения; так что первоначальная задача в случае несоизмеримых величин заключалась собственно не в том, чтобы определить смысл равенства (1), исходя из готовой теории действительных чисел, а в том, чтобы установить смысл символа α, отображающего результат сравнения величины a с единицей меры l. Например по определению немецкого математика Р. Дедекинда иррациональное число есть «сечение» в системе рациональных чисел. Такое сечение и появляется естественно при сравнении двух несоизмеримых величин a и l. По отношению к этим величинам все рациональные числа разделяются на два класса: класс R_1 рациональных чисел r, для которых $a > rl$, и класс R_2 рациональных чисел r, для которых $a < rl$.

Большое значение имеет приближенное измерение величин при помощи рациональных чисел.

Ошибка приближенного равенства $a \approx rl$ равна $\Delta = (r - \alpha)\, l$. Естественно искать такие $r = m/n$, для которых ошибка меньше, чем при любом числе $r' = m'/n'$ со знаменателем $n' \leqslant n$. Такого рода приближения доставляются *подходящими дробями* $r_1, r_2, r_3 \ldots$ к числу α, которые находятся при помощи *теории непрерывных дробей*. Например, для длины окружности a, измеряемой диаметром l, приближения таковы: $a \approx 3l$, $a \approx 3\frac{1}{7}l$, $a \approx 3\frac{15}{106}l$ и т. д.; для длины года a, измеряемой сутками l, приближения таковы: $a \approx 365l$, $a \approx 365\frac{1}{4}l$, $a \approx 365\frac{8}{33}l$.

3.3. Рассмотрение направленных отрезков на прямой, скоростей, могущих иметь два противоположных направления, и тому подобных величин естественно приводит к тому обобщению понятия скалярной величины, которое является основным в механике и физике. Система скалярных величин в этом понимании включает в себя, кроме положительных величин, нуль и отрицательные величины. Выбирая в такой системе какую-либо *положительную* величину l за единицу измерения, выражают все остальные величины системы в виде $a = \alpha l$, где α — действительное число, *положительное*, *отрицательное* или *равное нулю*. Конечно, систему скалярных величин в этом понимании можно охарактеризовать и аксиоматически, не опираясь на понятие числа. Для этого пришлось бы несколько изменить требования 1—10, которыми выше охарактеризовано понятие положительной скалярной величины.

3.4. В более общем смысле слова величинами называются *векторы*, *тензоры* и другие «нескалярные величины». Такие величины можно складывать, но отношение неравенства ($a < b$) для них теряет смысл.

3.5. В некоторых более отвлеченных математических исследованиях играют известную роль «*неархимедовы*» величины, которые имеют с обычными скалярными величинами то общее, что для них сохраняются обычные свойства неравенств, но аксиома 9 не выполняется (для скалярных величин в смысле п. 3.3 она сохраняется с оговоркой, что $b > 0$).

3.6. Так как система действительных положительных чисел удовлетворяет перечисленным выше аксиомам 1—10,

а система всех действительных чисел обладает всеми свойствами скалярных величин, то вполне законно сами действительные числа называть величинами. Это особенно принято при рассмотрении переменных величин. Если какая-либо конкретная величина, например длина l нагреваемого металлического стержня, изменяется во времени, то меняется и измеряющее ее число $x = l/l_0$ (при постоянной единице измерения l_0). Само это меняющееся во времени число x принимает в какие-либо последовательные моменты времени $t_1, t_2, \ldots$ «числовые значения» $x_1, x_2, \ldots$

В традиционной математической терминологии говорить о «переменных числах» не принято. Однако логичнее такая точка зрения: числа, как и длины, объемы и т. п., являются частными случаями величин, и, как и всякие величины, могут быть и переменными, и постоянными. Столь же законно и рассмотрение переменных векторов, тензоров и т. п.

По поводу принципиального значения перехода к рассмотрению переменных величин для всего развития математики см. статью «Математика» в Большой Советской Энциклопедии.

4. АЛГОРИТМ ЕВКЛИДА

Алгоритм Евклида — это способ нахождения *наибольшего общего делителя*. Он был предложен сначала в геометрической форме для нахождения *наибольшей общей меры* двух отрезков, или, вообще, двух геометрических величин. В этой же форме он имеется в «Началах» Евклида. Тот же, по существу, алгоритм применяется для нахождения наибольшего общего делителя двух *целых чисел* или наибольшего общего делителя двух *многочленов*. Только в современной алгебре эти разновидности алгоритма Евклида были отчетливо восприняты как частные случаи одной общей теории.

4.1. Пусть даны два отрезка a и b. Они называются соизмеримыми, если существует такой отрезок c, который укладывается какое-либо целое число n раз в отрезке a и какое-либо целое число m раз в отрезке b. Любой такой отрезок c называется общей мерой отрезков a и b. Если у отрезков a и b общей меры нет, то они называются несоизмеримыми. Среди общих мер двух отрезков a и b всегда существует *наибольшая* общая

мера c_0; любая другая общая мера тех же отрезков укладывается в наибольшей мере некоторое целое число раз. Например, наибольшей общей мерой отрезков 1000 м и 375 м является отрезок длины 125 м, укладывающийся в первом 8 раз, а во втором — 3 раза. Отрезки в 5 м и 1 м тоже будут общими мерами указанных отрезков, но уже не наибольшими.

Алгоритм Евклида позволяет найти для любых двух соизмеримых отрезков именно их наибольшую общую меру.

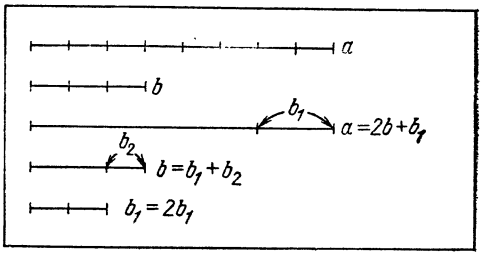


Рис. 79

Состоит он в следующем. Если отрезки a и b равны, то любой из них может быть принят за отрезок c_0. Если отрезки не равны, то пусть a обозначает больший отрезок, а b — меньший. В таком случае откладывают вдоль по отрезку a, начиная, скажем, от левого его конца (рис. 79), отрезок b столько раз, сколько он уложится. Если при этом не получается никакого остатка, то отрезок b и является наибольшей общей мерой (сам в себе он укладывается один раз). Если остается некоторый остаточный отрезок b_1 (который, очевидно, должен быть короче b), то он откладывается вдоль отрезка b столько раз, сколько он уложится. Если при этом не получается остатка, то b_1 и есть наибольшая общая мера c_0. В случае, когда вновь получается остаточный отрезок b_2, он откладывается вдоль отрезка b_1 и т. д. Если отрезки a и b *соизмеримы*, то процесс этот неизменно кончится на каком-либо шаге с номером k тем, что отрезок b_k уложится целое число раз в отрезке b_{k-1} (на рис. 79 это случается при $k = 2$). Отрезок b_k и есть в этом случае общая наибольшая мера отрезков a и b.

Алгоритм Евклида употребляется не только для нахождения общей меры двух отрезков, но и для доказательства существования среди общих

мер наибольшей, а также для доказательства того, что любая другая их общая мера содержится некоторое целое число раз в наибольшей. Это теоретическое назначение алгоритма Евклида в геометрии является основным, так как в конкретной измерительной практике указанный способ нахождения наибольшей общей меры отрезков мог бы найти лишь очень ограниченное применение.

4.2. Пусть a и b — два положительных целых числа, причем $a \geqslant b$. Деление с остатком числа a на число b всегда приводит к результату $a = nb + b_1$, где (неполное) частное n является положительным целым числом, а остаток b_1 — либо 0, либо положительное целое число, меньшее b: $0 \leqslant b_1 < b$. Будем производить последовательное деление:

$$\begin{aligned} a &= nb + b_1, \\ b &= n_1 b_1 + b_2, \\ b_1 &= n_2 b_2 + b_3, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{1}$$

(где все время n_i — положительные целые числа и $0 \leqslant b_i < b_{i-1}$) до тех пор, пока не получится остаток, равный нулю. Этот равный нулю остаток b_{k+1} можно не писать, так что ряд равенств (1) закончится так:

$$b_{k-2} = n_{k-1} b_{k-1} + b_k,$$

$$b_{k-1} = n_k b_k.$$

В курсах арифметики доказывается, что последний положительный остаток b_k в этом процессе и является наибольшим общим делителем чисел a и b. При этом алгоритм Евклида служит не только для нахождения общего наибольшего делителя, но и для доказательства самого его существования.

4.3. Пусть теперь $A(x)$ и $B(x)$ — два *многочлена*. Если степень многочлена $A(x)$ не меньше степени многочлена $B(x)$, то рассматриваемое во всех элементарных учебниках алгебры действие «деления с остатком» заключается в том, что находится многочлен-«частное» $N(x)$ и многочлен-«остаток» $B_1(x)$, обладающие тем свойством, что

$$A(x) = N(x) B(x) + B_1(x),$$

причем степень остатка $B_1(x)$ меньше степени $B(x)$. Процесс последовательного деления

$$A(x) = N(x)\,B(x) + B_1(x),$$
$$B(x) = N_1(x)\,B_1(x) + B_2(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$B_{k-2}(x) = N_{k-1}(x)\,B_{k-1}(x) + B_k(x),$$
$$B_{k-1}(x) = N_k(x)\,B_k(x)$$

в случае многочленов всегда кончается получением остатка $B_{k+1}(x)$ (не выписанного у нас), равного нулю. Последний *отличный от нуля* остаток $B_k(x)$ и есть *наибольший общий делитель многочленов* $A(x)$ и $B(x)$.

Алгоритм Евклида для отрезков (см. п. 4.1) может оказаться и бесконечным. Это будет в том (и только в том) случае, если взятые отрезки a и b *несоизмеримы*. Таков, например, случай диагонали и стороны квадрата. На рис. 80 изображен квадрат $ABCD$ с диагональю $AC = a$ и стороной $DC = b$. Мы строим отрезок $AD' = AD = b$, а на отрезке $D'C = b_1$ — квадрат $A'B'CD'$. На диагонали меньшего квадрата откладываем $A'D'' = A'D' = b_1$. Легко доказать, что углы, отмеченные на рис. 80 двумя дужками, равны 1/4 прямого угла. Поэтому $DA' = A'D' = b_1$. Первые шаги алгоритма Евклида в рассматриваемом случае будут таковы:

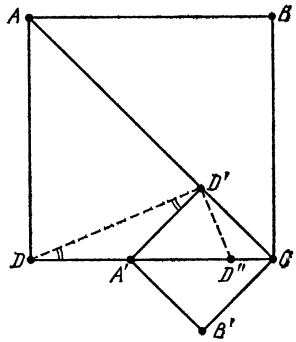


Рис. 80

$$a = AC = AD' + D'C = b + b_1,$$
$$b = DC = DA' + A'D'' + D''C = 2b_1 + b_2.$$

В силу подобия фигур $ABCDD'$ и $A'B'CD'D''$, при откладывании отрезка $D''C = b_2$ вдоль отрезка $D'C = b_1$ повторится точно та же картина, какая наблюдалась при откладывании отрезка $D'C = b_1$ вдоль отрезка $DC = b$. Поэтому дальнейшие шаги алгоритма Евклида будут таковы:

$$b_1 = 2b_2 + b_3,$$
$$b_2 = 2b_3 + b_4,$$
$$b_3 = 2b_4 + b_5,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

и так далее до бесконечности. Именно на этом пути греческие математики впервые открыли существование несоизмеримых отрезков.

Так как отношение диагонали квадрата к стороне равно $\sqrt{2}$, то приведенное геометрическое доказательство несоизмеримости диагонали и стороны квадрата вместе с тем является и доказательством иррациональности числа $\sqrt{2}$. В силу сказанного выше $\sqrt{2}$ разлагается в бесконечную непрерывную дробь следующего вида:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}}$$

5. О РЕШЕНИИ ДЕСЯТОЙ ПРОБЛЕМЫ ГИЛЬБЕРТА *)

В «Кванте» № 3 за 1970 год сообщалось о выдающемся успехе ленинградского математика Ю. В. Матиясевича, которому удалось сделать завершающий шаг в решении одной из знаменитых «проблем Гильберта», поставленных еще в 1900 году. Работа Ю. В. Матиясевича опубликована в Докладах Академии наук СССР **). И что бывает редко — вдумчивый школьник может самостоятельно разобраться в основном содержании этой работы, имеющей важное значение для современной математической науки. Дело в том, что оригинальная часть работы Ю. В. Матиясевича посвящена доказательству теоремы, формулировка которой вполне элементарна и приведена в публикуемой нами статье. Методы доказательства тоже элементарны. Труднее, правда, объяснить на понятном школьнику языке, почему эта теорема о числах Фибоначчи имеет столь значительный интерес для серьезной математической науки. По своей формулировке и методам доказательства она скорее напоминает хитроумную олимпиадную задачу.

5.1. Теорема о числах Фибоначчи

Во всем дальнейшем мы будем иметь дело только с целыми числами. Рассмотрим такое свойство пары чисел (a, b):

«*b делится на a*».

*) Статья написана в соавторстве с Ф. Л. Варпаховским.

**) Вот название и точный «адрес» статьи: Матиясевич Ю. В. Диофантовость перечислимых множеств // ДАН СССР, 1970.— Т. 191.— № 2.

Это свойство пары чисел можно выразить и так:

«существует число x такое, что $ax - b = 0$».

Мы выразили наше свойство пары чисел (a, b) через существование решения уравнения

$$ax - b = 0$$

(напомним еще раз, что мы имеем дело только с целыми числами и, значит, только с целыми решениями). Уравнение это имеет вид

$$P(a, b, x) = 0,$$

где P — многочлен от трех переменных a, b, x.

Введем теперь общее определение: *свойство конечной последовательности чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ называется диофантовым, если существует такой многочлен от $m + n$ переменных*

$$P(a_1, a_2, \ldots, a_m, x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

что последовательность $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ обладает нашим свойством в том и только в том случае, когда существуют числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, для которых

$$P(a_1, a_2, \ldots, a_m, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

Основное достижение Матиясевича как раз и состоит в доказательстве диофантовости некоторого специального свойства пар чисел (a, b).

Многие из вас знакомы с числами Фибоначчи

$$\begin{aligned}
&\psi_0 = 0, \quad \psi_1 = 1,\\
&\psi_2 = \psi_0 + \psi_1 = 1,\\
&\psi_3 = \psi_1 + \psi_2 = 2,\\
&\psi_4 = \psi_2 + \psi_3 = 3,\\
&\psi_5 = \psi_3 + \psi_4 = 5,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

бесконечная последовательность которых определяется рекуррентной формулой

$$\psi_{n+1} = \psi_{n-1} + \psi_n.$$

Свойство пары чисел (a, b), которым занимается Матиясевич, таково:

«b есть число Фибоначчи с номером $2a$», т. е. $b = \psi_{2a}$. Ясно, что этим свойством обладают пары

$$(0, 0), \ (1, 1), \ (2, 3), \ (3, 8)$$

и т. д. Утверждение, что свойство Матиясевича *диофантово*, означает, что *существует многочлен*

$$Q(a, b, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

такой, что b будет числом Фибоначчи с номером $2a$ тогда и только тогда, когда существуют такие числа $x_1, \ldots, x_n$, что

$$Q(a, b, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

Многочлен Q с целыми коэффициентами можно было бы в принципе явно выписать. Матиясевич этого не делает и даже не указывает, каково число n дополнительных переменных.

Что касается доказательства сформулированной теоремы, то, как уже было сказано, оно вполне элементарно. Матиясевич ссылается на одну лемму, доказанную в книжке Н. Н. Воробьева «Числа Фибоначчи», предназначенной для школьников, и один результат, доказанный в более ученой книге А. И. Мальцева, но тоже элементарный. В самой работе Матиясевича девятнадцать лемм приведены без доказательства, но доказательство каждой из них в отдельности не труднее обычных задач для школьников. Трудность состояла в том, чтобы найти ту именно комбинацию элементарных предложений, которая ведет к конечной цели.

5.2. Почему все это так важно?

Если бы многочлен Q Матиясевича был в самом деле очень нужен математикам для проведения каких-либо расчетов, то вероятно, Матиясевич не поленился бы его явно выписать. Но в действительности само обращение к числам Фибоначчи являлось для Матиясевича лишь вспомогательным средством для установления весьма общих и важных закономерностей.

В случае свойства Матиясевича существует очень простой регулярный способ (алгоритм) для последовательного выписывания всех обладающих этим свойством пар

$$(0, 0),\ (1, 1),\ (2, 3),\ (3, 8),\ (4, 21),\ (5, 55), \ldots$$

Так как множество этих пар бесконечно, то процесс их выписывания никогда не кончится. Но мы располагаем правилом, по которому наши пары можно выписывать одну за другой с уверенностью в том, что:

1) будут выписаны только пары, обладающие свойством Матиясевича;

2) любая пара, обладающая свойством Матиясевича, рано или поздно будет выписана.

Введем еще одно определение: свойство (на более ученом языке «*предикат*») конечной последовательности чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ называется *перечислимым*, если существует правило, позволяющее при помощи механического применения этого правила получать одну за другой последовательности, с непременностью обладающие заданным свойством, и притом так, что любая последовательность, обладающая этим свойством, рано или поздно будет получена.

С современной точки зрения самым значительным следствием теоремы Матиясевича о числах Фибоначчи является

Теорема 1. *Любое перечислимое свойство конечной последовательности чисел является диофантовым.*

До 1961 года эта теорема казалась бы крайне неожиданной. Но некоторый более слабый результат Девиса, Путнама и Робинсон, доказанный в 1962 году, сделал такую гипотезу уже не столь невероятной. На ее доказательство математиками были затрачены немалые усилия. Матиясевич и воспользовался некоторыми, как говорят, «редукциями» проблемы к более специальным задачам. Но идея свести все к свойствам чисел Фибоначчи была и в обстановке, сложившейся к 1970 году, неожиданной.

Таким образом, крупный успех Матиясевича требовал соединения понимания больших проблем современной математики и эрудиции в своей области с искусством находить неожиданные вполне элементарные пути решения специальных задач.

5.3. В каком смысле Матиясевич решил десятую проблему Гильберта

В десятой проблеме Гильберта *) речь идет об уравнениях вида

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

где P — многочлен с целыми коэффициентами. Степенью такого уравнения называют степень многочлена

*) Более подробно о проблемах Гильберта можно прочитать в книге Д. Гильберта «Математические проблемы» (Наука, 1969).

P. Когда вопрос ставится о нахождении их решений в целых числах, эти уравнения называются «диофантовыми». Например, уравнение

$$x^2 + y^2 = 1$$

имеет четыре решения в целых числах

$$x = \pm 1, \quad y = \pm 1,$$

а уравнение

$$x^2 + y^2 = 3$$

в целых числах решений не имеет.

Теперь предоставим слово самому Гильберту:

«*Пусть дано произвольное диофантово уравнение с произвольным числом неизвестных...; требуется указать общий метод, следуя которому можно было бы в конечное число шагов узнать, имеет данное уравнение решение в целых числах... или нет*».

Гильберт, по-видимому, был убежден, что искомый общий метод существует, и дело заключалось лишь в том, чтобы найти его. Немало усилий было затрачено, чтобы отыскать этот метод, но сколь-нибудь обнадеживающих результатов не получалось.

Задача о целых решениях произвольного уравнения легко сводится к задаче о натуральных (целых неотрицательных) решениях. Далее, совсем нетрудно показать, что достаточно ограничиться диофантовыми уравнениями степени не выше четвертой. Для диофантовых уравнений степени не выше второй искомый общий метод был найден, но уже уравнения третьей степени не поддавались никаким усилиям.

В связи с неудачами в этом направлении возникло подозрение, что этот общий метод, об отыскании которого говорится в формулировке Гильберта, попросту не существует! Сходная ситуация сложилась и в ряде других задач аналогичного характера. Однако одно дело найти требуемый общий метод — тут достаточно было только предъявить этот метод и непосредственно убедиться в том, что он удовлетворяет условиям, выдвинутым Гильбертом. А вот чтобы доказать несуществование некоего общего метода для решения серии задач, требовалось дать точное определение тому, что такое этот общий метод, как и какими средствами он может быть реализован.

В начале тридцатых годов соответствующие определения были выработаны в трудах американского ученого Чёрча и английского ученого Тьюринга. Эти определе-

ния положили начало теории алгоритмов. Оглядываясь на пройденный путь, математики должны быть благодарны десятой проблеме Гильберта уже за то, что она послужила одним из стимулов для создания этой теории.

В рамках теории алгоритмов было получено и точное определение понятия «перечислимое свойство», которым мы воспользовались в предыдущем пункте.

Оказалось, что из диофантовости любого перечислимого свойства конечной числовой последовательности вытекает

Теорема 2. *Невозможен общий метод (алгоритм), позволяющий для любого заданного диофантова уравнения установить, имеет оно решения в целых числах или нет.*

Матиясевич из своей теоремы о диофантовости специального свойства пары чисел (a, b)

$$b = \psi_{2a}$$

вывел доказательство теоремы 1, из которой, как уже было известно, вытекает теорема 2, т. е. отрицательное решение десятой проблемы Гильберта.

Для окончательного понимания всего сказанного вам не хватает только отчетливого знания того, что такое «алгоритм» (общий метод решения бесконечного ряда задач) и что такое «перечислимое свойство» (перечислимый предикат). Но это уже значительно более трудная тема

5.4. Определения и факты теории алгоритмов

1. Среди функций, определенных на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел и принимающих натуральные значения, следующим образом выделяется класс *примитивно рекурсивных функций*.

Рассматриваются функции $S(n) = n + 1$ и $q(n) = n - p$, где $p^2 \leqslant n < (p + 1)^2$. Из произвольных функций $f(n)$ и $g(n)$ разрешается образовывать функции $h_1(n) = f(n) + g(n)$ (операция сложения), $h_2(n) = f(g(n))$ (операция подстановки), а из одной функции $f(n)$ — функцию, определяемую равенствами $h_3(0) = 0$, $h_3(n + 1) = f(h_3(n))$ (операция итерирования). Класс примитивно рекурсивных функций состоит из функций S, q и всех тех функций, которые могут быть получены из них конечным числом сложений, подстановок и итерирований.

Пример. Покажем, что функции $\varphi(n) = 2n$ и $\psi(n) = 2n + 1$ примитивно рекурсивные. Применим сначала операцию итерирования к функции $S(n) = n + 1$. Тогда $h(0) = 0$, $h(n + 1) = S(h(n)) = h(n) + 1$. Следовательно, $h(n) = n$ и $\varphi(n)$ получается применением операции сложения к двум функциям, каждая из которых равна $h(n)$: $\varphi(n) = h(n) + h(n) = n + n = 2n$. Наконец, функция $\psi(n)$ получается операцией подстановки, примененной к функциям $S(n) = n + 1$ и $\varphi(n) = 2n$:

$$\psi(n) = S(\varphi(n)) = S(2n) = 2n + 1.$$

2. Множество M натуральных чисел называется *перечислимым*, если оно совпадает со множеством значений некоторой примитивно рекурсивной функции.

Так, например, *множество четных чисел перечислимо*, так как является множеством значений примитивно рекурсивной функции $\varphi(n) = 2n$. Множество нечетных чисел, совпадающее со множеством значений примитивно рекурсивной функции $\psi(n) = 2n + 1$, также перечислимо.

3. Множество M называется разрешимым, если оно перечислимо вместе со своим дополнением $\mathbb{N} \setminus M$ (где $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел).

В частности, разрешимо множество четных чисел, поскольку оно перечислимо вместе со своим дополнением (множеством нечетных чисел).

4. *Существуют перечислимые, но неразрешимые множества.*

Можно привести конкретный пример такого множества, однако соответствующая конструкция технически слишком сложна, для того чтобы ее можно было выполнить в рамках настоящей заметки.

Пусть теперь дано некоторое множество M натуральных чисел. Можно задаться вопросом, существует ли общий метод, который по каждому натуральному n определяет за конечное число шагов, принадлежит это n множеству M или нет. Основное положение теории алгоритмов (*тезис Чёрча*) утверждает, что *такой метод* (*алгоритм*) *существует тогда и только тогда, когда множество разрешимо.*

Для отрицательного решения десятой проблемы Гильберта достаточно было доказать *диофантовость каждого перечислимого множества*, т. е. по каждому перечислимому множеству M уметь строить такое диофантово уравнение $P(y, x_1, \ldots, x_k) = 0$, которое имело бы натураль-

ные решения $x_1, \ldots, x_k$ для всех y, принадлежащих M, и только для таких y.

В самом деле, если бы это можно было сделать, то взяв в качестве M неразрешимое множество (такие есть среди перечислимых, см. п. 4), мы получили бы, что уже для соответствующего уравнения $P(y, x_1, \ldots, x_k) = 0$ нет общего метода (алгоритма), который по каждому натуральному y давал бы ответ на вопрос о существовании у этого уравнения натуральных решений. Ведь если бы этот метод имелся, то можно было бы за конечное число шагов узнать, имеет ли уравнение $P(0, x_1, \ldots, x_k) = 0$ решение (т. е. принадлежит ли число 0 множеству M), имеет ли уравнение $P(1, x_1, \ldots, x_k) = 0$ решение (т. е. принадлежит ли число 1 множеству M) и т. д. Получилось бы, что существует общий метод, который по каждому натуральному y определяет за конечное число шагов, принадлежит это y множеству M или нет. Тогда в силу тезиса Чёрча M было бы разрешимо вопреки выбору этого множества.

5.5. Что было сделано и что сделал Матиясевич

В пятидесятые годы группа американских математиков (Р. Робинсон, Х. Путнам, М. Дэвис, Дж. Робинсон) получила ряд значительных и обнадеживающих результатов в поисках доказательства диофантовости перечислимых множеств. (Гипотезу о диофантовости перечислимых множеств выдвинул Мартин Дэвис.)

Американским ученым ценою значительных усилий удалось свести задачу к доказательству диофантовости отношения $y = z^u$. Джулия Робинсон пошла даже несколько дальше, показав, что достаточно построить конкретное уравнение $R(u, v, x_1, \ldots, x_k) = 0$, не допускающее решения с $v > u^u$, но для каждого n имеющее решение с $v > u^n$. Именно такого рода уравнение и удалось построить Ю. В. Матиясевичу, предложившему вполне элементарную, но чрезвычайно остроумную и оригинальную конструкцию. При этом пришлось решать задачу, необычную для традиционной теории чисел. Ведь в теории чисел по заданному уравнению, как правило, исследуются свойства его решений, здесь же, наоборот, задавшись определенными свойствами решений, нужно было искать требуемое уравнение.

Обратившись к рассмотрению последовательности Фибоначчи, Матиясевич заметил, что если за u взять *половину номера четного члена* последовательности, а за v — *сам член*, то неравенство $v > u^u$ будет всегда неверно, а для любого n можно найти такой *четный* член последовательности, что неравенство $v > u^n$ будет верно. Это обстоятельство иллюстрируется таблицей, приведенной ниже. (В ней выделены те клетки, в которых числа u^k оказываются меньше соответствующих чисел v.)

После того как указанное свойство было проверено, Матиясевич «подправил» последовательность Фибоначчи, выбросив из нее нечетные члены. Именно, он рассмотрел

Номер члена последовательности	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Член последовательности v	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	
Половина номера четного члена последовательности u	0		1		2		3		4		5		6	
u^u	1		1		4		27		64		3125		47 256	
u^0	1		1		1		1		1		1		1	
u^1	0		1		2		3		4		5		6	
u^2	0		1		4		9		16		25		36	
u^3	0		1		8		27		64		125		216	

последовательность, задаваемую соотношениями: $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 1$, $\varphi_{n+1} = 3\varphi_n - \varphi_{n-1}$. Получилась в точности последовательность из четных членов первоначальной последовательности: $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = 3$, $\varphi_3 = 8$, $\varphi_4 = 21$, $\varphi_5 = 55$, $\varphi_6 = 144$, $\varphi_7 = 377$ и т. д. Приняв теперь за u номер члена последовательности, а за v — член последовательности с номером u, т. е. φ_u, мы получаем, что снова выполняется требуемое свойство для u и v. Теперь оставалось построить уравнение $P(u, v, x_1, \ldots, x_k) = 0$, которое имело бы натуральное решение тогда и только тогда, когда $v = \varphi_u$, — дальше можно было бы сослаться на результат Джулии Робинсон! Для этого достаточно было бы построить систему диофантовых уравнений $P_1 = 0, \ldots, P_n = 0$ в переменных $u, v, x_1, \ldots, x_k$, имеющую решение тогда и

только тогда, когда $v = \varphi_u$,— ведь такая система имеет в точности те же решения, что и единственное уравнение $P_1^2 + \ldots + P_n^2 = 0$. Вот в каком виде получил Матиясевич требуемую систему уравнений:

1) $u + (a - 1) = v$,
2) $v + b = l$,
3) $l^2 - lk - k^2 = 1$,
4) $g^2 - gh - h^2 = 1$,
5) $l^2c = g$,
6) $ld = r - 2$,
7) $(2h + g)\, e = r - 3$,
8) $x^2 - rxy + y^2 = 1$,
9) $lp = x - u$,
10) $(2h + g)\, q = x - v$.

Для доказательства того, что существование натурального решения этой системы равносильно соотношению $v = \varphi_u$, Матиясевич использовал следующее характеристическое свойство последовательности $\{\varphi_k\}$:

пара условий $x < y$ и $x^2 - 3xy + y^2 = 1$ равносильна существованию такого k, что $x = \varphi_k$ и $y = \varphi_{k+1}$.

Интересующемуся читателю рекомендуем попробовать свои силы на доказательстве этой равносильности.

Укажем в заключение, что найденное решение десятой проблемы имеет ряд интересных следствий, из которых, может быть, наиболее эффектным является следующее: *можно указать конкретный многочлен пятой степени, множество положительных значений которого совпадает со множеством всех простых чисел!*

Математическая наука записала в свой актив серьезное и поучительное достижение.

Задачи.

1. Покажите, что для любого k числа φ_k и φ_{k+1} взаимно просты.
2. Докажите соотношение: $\varphi_{k+l} = \varphi_{k+1}\varphi_l - \varphi_k\varphi_{l-1}$.
3. Покажите, что диофантово уравнение $P(y, x_1, \ldots, x_k) = 0$ имеет решение в целых положительных числах тогда и только тогда, когда такое решение имеет уравнение

$$Z = (1 - P(z, x_1, \ldots, x_k)^2) - y.$$

6. К ОБОСНОВАНИЮ ТЕОРИИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

Обычно при построении теории вещественных чисел предполагают уже построенной теорию рациональных чисел. Возможно поступать иначе и вводить вещественные числа непосредственно вслед за

ц е л ы м и. Предлагаемый далее способ такого обоснования теории вещественных чисел является не чем иным, как современным формализованным изложением евклидовой теории отношений. Ради достижения наибольшей простоты и близости к классическому евклидову построению строится система положительных вещественных чисел. Присоединение к ней нуля и отрицательных вещественных чисел можно произвести хорошо известным обычным способом.

Мы предполагаем известными только *неотрицательные целые числа* 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... и обозначаем их малыми латинскими буквами. Эти числа, за исключением *нуля*, называются н а т у р а л ь н ы м и. Если m — неотрицательное число, а n — натуральное число, то знак

$$\left[\frac{m}{n}\right]$$

обозначает неполное частное от деления m на n, т. е. наибольшее целое число k, для которого

$$kn \leqslant m.$$

О п р е д е л е н и е 1. *Положительным вещественным числом называется однозначная функция* $m = \varphi(n)$, *определенная для всех натуральных* n, *с неотрицательными целыми значениями* m, *которая обладает следующими свойствами*:

1) *для всех натуральных* k

$$\varphi(n) = \left[\frac{\varphi(kn)}{k}\right];$$

2) *для любого натурального* n *существует такое натуральное* k, *что*

$$\varphi(kn) > k \cdot \varphi(n).$$

Положительные вещественные числа будем обозначать малыми греческими буквами, а множество положительных вещественных чисел буквой Ф. Отношение порядка и операции сложения и умножения вводятся в множестве Ф такими определениями:

О п р е д е л е н и е 2. $\varphi < \psi$ *обозначает, что существует такое натуральное* n, *для которого* $\varphi(n) < \psi(n)$.

О п р е д е л е н и е 3. $\varphi + \psi = \chi$ *обозначает, что для всех натуральных* n

$$\chi(n) = \max\left[\frac{\varphi(kn) + \psi(kn)}{k}\right],$$

где max *берется по всем натуральным* k.

Определение 4. $\varphi \cdot \psi = \chi$ *обозначает, что для всех натуральных* n

$$\chi(n) = \max\left[\frac{\varphi(kn)\cdot\psi(k'n)}{n\cdot k\cdot k'}\right],$$

где max *берется по всем парам натуральных* k *и* k'.

Задача, предлагаемая вниманию читателей, заключается в доказательстве того, что *множество* Ф *с определенными выше отношениями порядка и операциями сложения и умножения действительно обладает всеми свойствами обычных положительных вещественных чисел* (т. е. изоморфно системе положительных вещественных чисел, построенных любым другим общепринятым способом).

Замечание 1. При любом натуральном r функция $\varphi_r(n) = nr - 1$ удовлетворяет условиям определения 1, т. е. является в нашей концепции положительным вещественным числом *).

Это «число» φ_r естественно идентифицировать с натуральным числом r. При таком соглашении система Ф делается *расширением* системы натуральных чисел.

Замечание 2. Присоединив к Ф число *нуль* и условившись, что

$$0 + 0 = 0,$$
$$0\cdot 0 = 0,$$

и для всех φ из Ф

$$0 < \varphi,$$
$$\varphi + 0 = 0 + \varphi = \varphi, \quad \varphi\cdot 0 = 0\cdot\varphi = 0,$$

получим систему Ф′ *неотрицательных* вещественных чисел. Множество Ф′ после соглашения, сделанного в замечании 1, содержит в себе в качестве подмножества множество всех неотрицательных целых чисел.

Естественно теперь для любого φ из Ф по определению положить $[\varphi]$ (целую часть φ) равным наибольшему из целых чисел, для которых

$$m \leqslant \varphi.$$

Замечание 3. Если определить деление в Ф′ как действие, обратное умножению, то можно показать, что для любого неотрицательного целого m и натураль-

*) Читатель легко обнаружит, что функция $F_r(n) = nr$ не удовлетворяет условию 2 определения 1 и поэтому в множество Ф не входит.

ного n (рассматриваемых как элементы множества Φ') результат двойной операции деления и взятия целой части

$$\left[\frac{m}{n}\right]$$

совпадает с неполным частным, определенным непосредственно.

Замечание 4. Наконец, можно доказать, что для любого φ из Φ

$\varphi(n) = \varphi n - 1$ в случае φ целого;

$\varphi(n) = [\varphi n] - 1$ в случае φ дробного (нецелого).

Таким образом, $\varphi(n)$ *оказывается в конце концов не чем иным, как наибольшим целым числом* m, *для которого*

$$\frac{m}{n} < \varphi.$$

В формальном изложении нового способа построения системы действительных чисел это предложение неизбежно должно явиться лишь заключительным звеном длинной цепи определений и выводов из них.

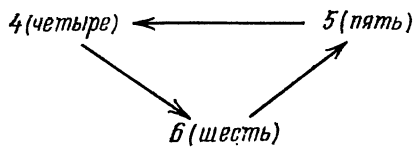
Но оно, конечно, является исходным пунктом для понимания замысла этого построения.

7. ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ

7.1. Задача о периодических последовательностях

По любому натуральному числу n можно построить другое натуральное число m по следующему правилу: запишем число n русскими словами и подсчитаем количество затраченных на эту запись букв — это и будет число m. Например, числу $n = 1987$ (тысяча девятьсот восемьдесят семь) отвечает число $m = 30$.

Делая такие сопоставления $n \to m$ для маленьких n, легко найти те из них, которые «переходят» сами в себя (то есть $m = n$): это $n_1 = 3$ (три) и $n_2 = 11$ (одиннадцать). Однако есть еще одна тройка замечательных чисел, которые указанным преобразованием переводятся друг в друга по циклу. Эта тройка состоит из чисел 4, 5 и 6:



А что происходит с другими числами? Чтобы выяснить это, надо провести многократные и т е р а ц и и указанного преобразования над выбранным числом и выписать получающуюся цепочку чисел. Например:

$$1987 \longrightarrow 30\,(\textit{тридцать}) \longrightarrow 8\,(\textit{восемь}) \longrightarrow 6 \longrightarrow 5 \longrightarrow 4 \longrightarrow 6$$

Первый же взятый наугад пример привел нас к циклу $6 \to 5 \to 4 \to 6$. Конечно, имеется также много чисел, сводящихся и к «неподвижным» точкам $n_1 = 3$ и $n_2 = 11$ нашего преобразования. *Но все ли числа сводятся в конечном счете к этим неподвижным точкам или к циклу* $4 \to 6 \to 5 \to 4$?

Полное решение этой задачи состоит в последовательном решении двух более простых задач:

1. *Найти все неподвижные точки и циклы указанного преобразования* (*две неподвижные точки и один цикл нами уже найдены*).

2. *Доказать, что любое число n с помощью конечного числа итераций сводится к одной из неподвижных точек или одному из циклов.*

Второе утверждение вам может показаться сомнительным — тогда попытайтесь опровергнуть его!

Если вы знаете какие-нибудь другие языки, порешайте аналогичную задачу и для них. Оказывается, что *для любого языка из ныне существующих* (*даже, быть может, вам неизвестных*) *можно чисто математическими рассуждениями решить вторую из указанных задач.* Замечу при этом, что все числа, входящие в неподвижные точки и циклы на этих языках, н е п р е в о с х о д я т 100. Почему?

По поводу этой задачи можно ставить и другие вопросы. Например:

3. *Каковы классы эквивалентных в смысле рассматриваемого преобразования чисел*? (Два числа эквивалентны, если они сводятся к одной и той же неподвижной точке или одному и тому же циклу.)

4. *Оценить число шагов* (*итераций*), *за которое данное число «превращается» в неподвижную точку или попадает в цикл.*

Эти вопросы уже существенно сложнее, и на их решении я не настаиваю.

А теперь берите карандаши и бумагу и принимайтесь за решение!

7.2. Решето Эратосфена

Эта красивая форма решета Эратосфена (рис. 81) заимствована из книги М. Гарднера «*Математические досуги*» (Мир, 1972). Все не перечеркнутые числа — простые, кроме числа 121. Объясните, почему!

2	3	4	5!	6	7!
8	9	10	11	12	13!
14	15	16	17	18	19!
20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31!
32	33	34	35	36	37
38	39	40	41	42	43!
44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61!
62	63	64	65	66	67
68	69	70	71	72	73!
74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85
86	87	88	89	90	91
92	93	94	95	96	97
98	99	100	101	102	103!
104	105	106	107	108	109!
110	111	112	113	114	115
116	117	118	119	120	121

Рис. 81

Задача 1. *Чтобы получить список простых чисел, меньших* 1000, *надо «отсеять» числа, которые делятся на* 2, 3, 5, 7, 11 ... *На каком простом числе можно при этом остановиться?*

Как изменится ответ для случая составления таблицы простых чисел, меньших 10 000?

Восклицательным знаком отмечены в таблице (рис. 81) пары простых чисел-«близнецов». В нашей таблице их десять.

Известно, что простых чисел бесконечно много. Но никто не знает, конечно или бесконечно множество пар близнецов.

Задача 2. *Первые две пары близнецов* (3, 5) *и* (5, 7) *имеют общий элемент* (5). *«Расстояние» между второй и третьей парой близнецов* (11, 13) *равно*

$$11 - 7 = 4.$$

Расстояние между третьей и четвертой (17, 19)

$$17 - 13 = 4,$$

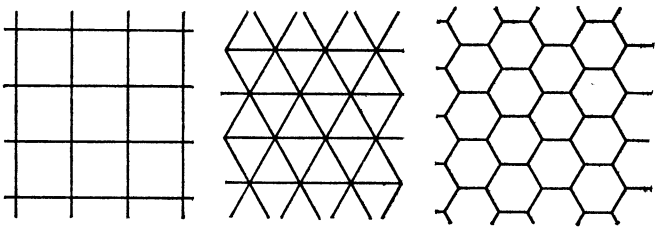
между четвертой и пятой (29, 31)

$$29-19=10.$$

Докажите, что далее расстояние между соседними парами близнецов никогда не будет меньше четырех.

7.3. Паркеты из правильных многоугольников

7.3.1. Что такое паркет. Самый простой, но и самый скучный паркет получается, если плоскость разбить на равные квадраты так, как показано



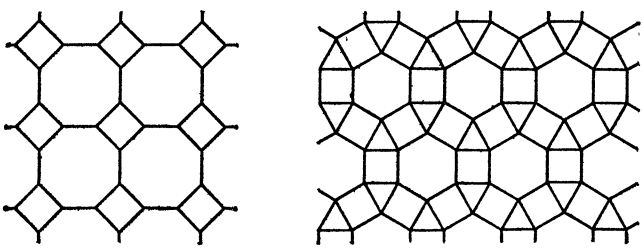
а б в

Рис. 82

на рис. 82, *а*. Здесь два квадрата имеют либо общую сторону, либо общую вершину, либо совсем не имеют общих точек.

Паркетом будем называть такое покрытие плоскости правильными многоугольниками, при котором два многоугольника имеют либо общую сторону, либо общую вершину, либо совсем не имеют общих точек.

Вероятно, вам случалось видеть паркет, составленный из правильных восьмиугольников и квадратов (рис. 83, *а*).



а б

Рис. 83

Красивый паркет можно составить из правильных шестиугольников, квадратов и равносторонних треугольников (рис. 83, *б*).

Паркет производит приятное впечатление, если он достаточно симметричен. *Фигура называется симметричной, если ее можно наложить на саму себя «не тривиальным» способом (т. е. не таким, когда все точки останутся на своем месте).*

Например, на рис. 83, *б*, повернув всю сетку вершин и сторон, образующих паркет из шестиугольников, квадратов и треугольников, на 60° вокруг центра одного из шестиугольников, мы получим ту же самую сетку вершин и сторон. Центр каждого шестиугольника этого паркета является «центром симметрии шестого порядка» *).

Задача 1. *Найдите все центры симметрии 4-го 3-го и 2-го порядка у паркета, изображенного на рис. 83, а.*

7.3.2. Что такое правильный паркет. С точки зрения симметрии наше определение паркета не слишком удачно. Оно допускает паркеты, не обладающие никакой симметрией. Взяв обычный паркет из шестиугольников (рис. 82, *в*), можно «испортить» его, подразделив некоторые из шестиугольников на шесть треугольников. Легко понять, что получится вновь «паркет» в смысле нашего определения. Но можно доказать (попробуйте!), что, подразделив, например, три шестиугольника, как показано на рисунке 84, и оставив все остальные не подразделенными, мы получим паркет, совсем лишенный симметрии. Чтобы устранить некрасивые, недостаточно симметричные паркеты, мы введем такое определение:

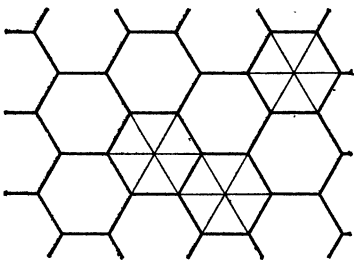


Рис. 84

Паркет называется правильным, если его можно наложить на самого себя так, что любая заданная его вершина наложится на любую другую заданную его вершину.

---

*) Точка O называется *центром симметрии* n-го порядка некоторой фигуры, если при повороте этой фигуры вокруг O на $360°/n$ она наложится на саму себя.

Задача 2. *Докажите, что паркеты, представленные на рисунках 82, б, в и 83, правильны и постройте самостоятельно возможно больше правильных паркетов.*

7.3.3. Основная задача. Оказывается, что все разнообразие правильных паркетов можно описать. Если длина h стороны многоугольников паркета задана, то *существует только конечное число различных (не накладывающихся друг на друга) правильных паркетов.* Сколько именно, я не хочу вам говорить.

Перечислить их все и тем самым ответить на вопрос об их числе — это и есть основная задача, которую вам предстоит решить.

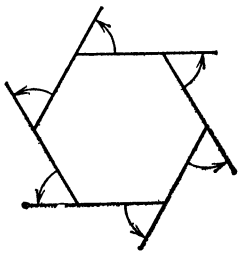


Рис. 85

7.3.4. Некоторые указания. Решение задачи естественно начать с исследования устройства вершин паркета. Правильный n-угольник имеет n внешних углов (рис. 85), сумма которых равна четырем прямым углам (убедитесь в этом сами). Поэтому каждый угол правильного n-угольника равен

$$\alpha_n = 2d - \frac{4d}{n} = 2\left(1 - \frac{2}{n}\right)d.$$

В вершине паркета должны сходиться многоугольники с суммой углов, равной $4d$. Так,

$$\alpha_3 = \frac{2}{3}d,\ \alpha_4 = d,\ \alpha_6 = \frac{4}{3}d,\ \alpha_8 = \frac{3}{2}d$$

и для паркетов, изображенных на рис. 82 и 83, имеем:

$$\begin{aligned} 4\alpha_4 &= 4d, \\ 6\alpha_3 &= 4d, \\ 3\alpha_6 &= 4d, \\ \alpha_4 + 2\alpha_8 &= 4d, \\ \alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_6 &= 4d. \end{aligned}$$

В общем же случае, обозначая через m_n число прилегающих к вершине n-угольников, мы должны получить

$$\sum m_i \alpha_i = 4d, \qquad (1)$$

где в сумму мы включаем слагаемые с теми номерами i, для которых $m_i > 0$, $\alpha_i = 2\left(1 - \frac{2}{i}\right)d$.

Первая наша задача состоит в том, чтобы найти все решения уравнения (1) с целыми $m_i > 0$. Уравнение (1), сокращая на $2d$, удобно записать в виде

$$\sum m_i\left(1-\frac{2}{i}\right)=2. \qquad (2)$$

Для каждого решения уравнения (2) надо исследовать соответствующие расположения многоугольников, примыкающих к вершине. Например, решению $m_3 = 1$, $m_4 = 2$, $m_6 = 1$,

$$\left(1-\frac{2}{3}\right)+2\left(1-\frac{2}{4}\right)+\left(1-\frac{2}{6}\right)=2,$$

соответствуют вершины, в которых сходится один треугольник, два квадрата и один шестиугольник. Их легко расположить двумя существенно различными способами

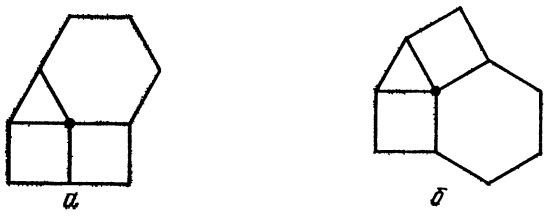


Рис. 86

(рис. 86, *а* и *б*). Но легко показать (докажите!), что расположению *б* не соответствует никакой правильный паркет.

Указаний дано достаточно. Беритесь за работу!

7.4. Раскраска плоских решеток

(а) На рисунке, приведенном на четвертой странице обложки, плоскость покрыта квадратами пяти цветов. Центры квадратов одного и того же цвета расположены в вершинах квадратной сетки. *При каком числе цветов возможно аналогичное заполнение плоскости?*

(б) На другом рисунке четвертой страницы обложки плоскость покрыта шестиугольниками с е м и цветов так, что центры шестиугольников одного и того же цвета образуют вершины решетки из одинаковых правильных треугольников. *При каком числе цветов возможно аналогичное построение?*

Примечание. В первой задаче число цветов может равняться *единице* (все квадраты одного цвета) и *двум* (как на шахматной доске). Во второй задаче вы без труда найдете решения с одним цветом и с тремя цветами. Желательно дать полное решение задач, т. е. описать все раскраски, удовлетворяющие указанным условиям. Придумайте, например, существует ли во второй задаче решение с тринадцатью цветами?

7.5. Задача о переключателях

На рис. 87 изображена схема, позволяющая расположить у двери и над кроватью два переключателя, каждым из которых можно гасить или зажигать лампочку

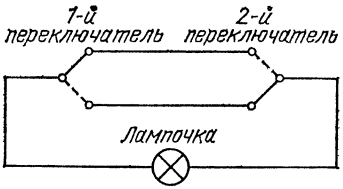


Рис. 87

в комнате независимо от положения второго переключателя. *Придумайте схему, позволяющую гасить или зажигать свет из n мест комнаты.*

7.6. Задача о вложенных треугольниках и вложенных тетраэдрах

(а) На плоскости расположено бесконечное множество треугольников, вложенных последовательно друг в друга. Доказать, что множество, являющееся пересечением всех этих треугольников, либо треугольник, либо одна точка.

(б) Доказать, что пересечением вложенных друг в друга тетраэдров может быть либо тетраэдр, либо треугольник, либо отрезок, либо точка.

7.7. Проверка цилиндрических деталей

На некоторых заводах производят проверку цилиндрических деталей следующим образом: деталь укладывают в лоток и вращают так, чтобы она касалась

обеих сторон лотка, затем серху подводится «щуп» (стержень, который может совершать продольные перемещения) до соприкосновения с деталью. Если во время вращения щуп сдвигается, то деталь считается нецилиндрической и бракуется.

Возникает следующая математическая задача. Зафиксируем на плоскости точку A и рассмотрим все фигуры, которые, поворачиваясь, касаются двух данных пересекающихся прямых, причем граница этих фигур проходит через точку A (рис. 88). (Нетрудно понять, что при отсутствии точки A любая ограниченная фигура может, поворачиваясь, касаться двух пересекающихся прямых.) *Существуют ли фигуры, отличные от круга и обладающие таким свойством?*

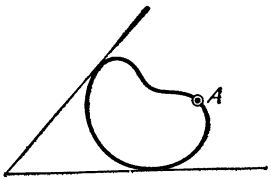


Рис. 88

Если существуют отличные от круга фигуры, удовлетворяющие условиям задачи, то цилиндры, имеющие в сечении такую фигуру, будут великолепно проходить через отдел технического контроля.

Решите ту же задачу для выпуклых фигур. До сих пор ответ на этот вопрос не получен.

РАЗДЕЛ IV

ЛЕКЦИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ

1. СОВРЕМЕННЫЕ ВЗГЛЯДЫ НА ПРИРОДУ МАТЕМАТИКИ

Разговоры о «модернизации» школьного курса математики сейчас в большой моде. Появляется много книг, излагающих начала «современной математики». Некоторые из них предназначены непосредственно для школьников, другие — обращаются к учителям. За «современную» при этом обычно выдается концепция, которая кратко может быть охарактеризована следующими двумя тезисами:

А. *В основе всей математики лежит чистая теория множеств.*

Б. *Специальные разделы математики занимаются структурами, принадлежащими к тем или иным специальным родам структур. Каждый род структур определяется соответствующей системой аксиом, выраженной на языке теории множеств. Математика интересуется только теми свойствами структур, которые вытекают из принятой системы аксиом, т. е. изучает структуры только с точностью до изоморфизма.*

Современность этой концепции относительна. Она полностью сложилась на рубеже XIX и XX веков. Несколько десятилетий назад широкие круги математиков знакомились с ней по «Основаниям геометрии» Гильберта, первое издание которых вышло в 1899 г.

Гильбертовская система аксиом, характеризующая род структур, называемых «трехмерными евклидовыми пространствами», довольно сложна. Поэтому сейчас справедливо считают, что первые представления о математических структурах, их изоморфизме и о характеризации родов структур системами аксиом разумно получать на другом материале. При этом особенно удобным на первых порах считают роды структур, среди представителей которых имеются конечные структуры.

Будем, например, называть *плоскостью* структуру (π, L), состоящую из множества π, элементы которого будем называть «точками», и множества L подмножеств множества π. Элементы множества L будем называть «прямыми». Сформулируем аксиомы:

1. *Каждой прямой принадлежат по крайней мере две точки.*

2. *Две (различные) точки определяют единственную прямую, которой они обе принадлежат.*

3. *Существуют три точки, для которых нет прямой, содержащей их все.*

На рис. 89 изображена простейшая структура, обладающая свойствами 1—3. Две прямые будем называть *параллельными*, если их пересечение пусто. Сформулируем еще одну аксиому:

4. *Если точка A не принадлежит прямой a, то она принадлежит по крайней мере одной прямой, параллельной a.*

Из курса оснований геометрии вы, вероятно, знаете, что аксиома 4 не соблюдается на плоскости Римана, но

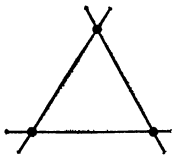


Рис. 89

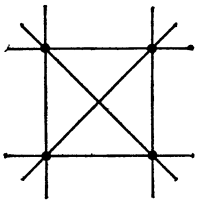


Рис. 90

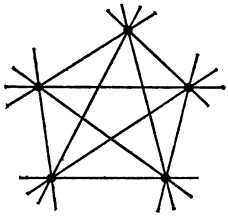


Рис. 91

верна как на евклидовой плоскости, так и на плоскости Лобачевского. Но пример, изображенный на рис. 89, обосновывает ее независимость от трех первых аксиом значительно проще, чем при помощи обращения к плоскости Римана.

На плоскости, обладающей свойствами 1—4, имеется *не менее четырех точек и не менее шести прямых.* При желании вы можете без большого труда сами доказать эту теорему. Простейший пример плоскости, обладающий всеми четырьмя сформулированными свойствами, изображен на рис. 90.

Легко проверить, что на плоскости рис. 90 через каждую точку, лежащую вне прямой, проходит ровно одна прямая, параллельная этой прямой. Простейшая плоскость,

обладающая свойствами 1—4, на которой это неверно, изображена на рис. 91. Существование структуры рис. 91 доказывает *независимость пятого постулата Евклида* (о единственности параллельной) *от аксиом* 1—4. Вы видите, что первые достаточно поучительные упражнения на построение структур, удовлетворяющих или не удовлетворяющих тому или иному набору аксиом, могут быть очень элементарными. Мне кажется, что они должны были бы сопровождать самые начала школьного систематического курса геометрии (например, в VI классе).

Отметим здесь еще два очень просто определяемых рода структур, которые нам понадобятся в ближайших лекциях, не обсуждая пока вопроса о том, на каком этапе школьного обучения следует формулировать их общие определения.

Упорядоченное множеств *)

$$\mathfrak{M} = (M, \dashv)$$

есть структура, состоящая из множества M и отношения $a \dashv b$, установленного между некоторыми парами элементов множества M и удовлетворяющего аксиомам:

1. *Для двух элементов a и b имеет место одно и только одно из трех отношений $a \dashv b$, $a = b$, $b \dashv a$.*

2. *Если $a \dashv b$ и $b \dashv c$, то $a \dashv c$.*

В первой аксиоме знак равенства обозначает, что буквы a и b являются обозначениями одного и того же элемента. В таком понимании, которого мы будем держаться и далее, *отношение равенства есть общее логическое отношение*, знакомство с которым предшествует построению специальных теорий отдельных родов структур. Вторая аксиома выражает свойство транзитивности отношения.

Группа есть структура

$$\mathfrak{B} = (G, n, *),$$

состоящая из множества G, выделенного в нем элемента

---

*) Мы держимся более старой традиции. Теперь часто, следуя Н. Бурбаки, придают понятию упорядоченного множества более широкий смысл, а упорядоченные множества в нашем смысле называют *совершенно упорядоченными*. Традиционная терминология, по которой упорядоченные множества в смысле Н. Бурбаки называются *частично упорядоченными*, по моему мнению, удобнее для школы, так как учащиеся раньше и чаще будут встречаться с упорядоченными (в нашем смысле) множествами, чем с только частично упорядоченными.

n и определенной на G бинарной операции $a * b$, обладающих свойствами:

1) $a * (b * c) = (a * b) * c$;

2) $a * n = a$;

3) для любого $a \in G$ существует такой элемент $a' \in G$, что $a * a' = n$.

Более подробно родами структур, представляющими интерес для школьного преподавания, мы займемся в дальнейших лекциях. А сейчас для создания правильной перспективы я должен сразу вас несколько разочаровать в отношении окончательной ценности сформулированных выше тезисов **А** и **Б**. Если воспринимать их в том наивном смысле, в котором они преподносятся школьникам даже в самых «модернизированных» вариантах школьного курса, они вовсе не являются последним словом науки.

Дело в том, что уже начиная с арифметики натуральных чисел математика имеет дело с бесконечными множествами, а наши представления о бесконечных множествах не имеют непосредственной адекватной опоры в опыте, они создаются путем отвлечения от реальной ограниченности наших возможностей наблюдения и эксперимента. Поэтому совсем неудивительно, что теория множеств, развиваемая на основе кажущейся «очевидности» нашего права переносить на бесконечные множества те или иные способы рассуждений, оправдавшие себя на практике в применении к конечным множествам, вскоре наткнулись на *противоречия;* смягченно называемые обычно «парадоксами теории множеств».

Были придуманы ограничения, которые позволяют этих уже замеченных противоречий избежать. Но такой путь введения ограничений по мере появления противоречий не представляется вполне удовлетворительным. Честнее было признать, что самый *смысл* многих утверждений первоначальной «наивной» теории множеств недостаточно ясен.

Можно было бы думать, что генеральной линией развития теоретико-множественной математики окажется погружение в теоретико-познавательные изыскания за счет того, какая же часть первоначального замысла Георга Кантора достаточно «разумна» и надежна. По этому пути и пошли Борель, Брауэр, а в настоящее время идут представители так называемого «конструктивного направления в математике».

Но другой путь в двадцатых годах нашего века предложил Гильберт. Он заметил, что *все практические примене-*

ния теоретико-множественной математики непосредственно основываются лишь на предложениях, относящихся к конечным множествам. Для того чтобы эти практические применения были вполне надежны, нет никакой необходимости приписывать всем предложениям теретико-множественной математики какой бы то ни было реальный смысл. Необходимо только, чтобы использованный фрагмент теоретико-множественной математики был *формально непротиворечив.*

По концепции Гильберта классическая теория множеств и основанные на ней теории специальных видов математических структур в их полном объеме могут рассматриваться только как *словесные конструкции*, лишенные какого-либо реального содержания. Так как обычный наш язык недостаточно определен, то такую лишенную реального содержания математику предпочитают считать в принципе изложенной на искусственном символическом языке математической логики. Оговорка «в принципе» здесь существенна для понимания действительного положения вещей на наш день. На практике математики, принявшие эту точку зрения, продолжают пользоваться и обычным языком, но таким образом, что они всегда сохраняют уверенность в возможности записать все сказанное на точно описанном, построенном по строго определенным правилам языке логических и математических символов.

Наиболее популярно в настоящее время выполненное по этому плану изложение всех основных разделов математики, публикуемое под псевдонимом Николая Бурбаки (тома «Элементов математики» Н. Бурбаки выходят один за другим и в русском переводе). Не все детали работы, выполненной группой французских математиков, скрывающихся под этим псевдонимом, удачны. Но, по-видимому, многие современные математики считают наиболее надежной опорой своего права пользоваться всем арсеналом средств теоретико-множественной математики, именно продемонстрированную в «Элементах математики» Н. Бурбаки возможность ее полностью формализованного изложения, непротиворечивость которого не вызывает у них больших сомнений.

Таким образом, сейчас мы имеем, по существу, не одну математику, а д в е: *содержательно воспринимаемую* и *формализованную.* Вторая реализуется в виде *символических исчислений*, формулам которых не приписывается никакого смысла. Что касается содержательных утверж-

дений об этих исчислениях, то они относятся к особой науке, которой Гильберт дал название *метаматематики*. Следует сразу подчеркнуть, что формализованная математика без метаматематики не представляет никакого интереса. Лишь метаматематика позволяет установить, каким формулам формализованной математики можно придать содержательное толкование, допускающее применения к изучению реального мира и в реальной человеческой практике.

Таким образом, нам предстоит разобраться во взаимных отношениях между четырьями областями человеческой деятельности:

1) изучение реального мира и практическое воздействие на него,

2) содержательная математика,

3) формализованная математика,

4) метаматематика.

Математические структуры создаются и изучаются с целью применения полученных результатов для изучения реальных явлений и управления ими. Для этого в рамках математики создаются модели реальных систем. Лишь *конечные модели* отражают адекватно соотношения между конечными системами реальных объектов. Но на практике мы пользуемся с большой свободой и бесконечными моделями, хотя они и являются всегда, по существу, незаконными идеализациями реальной действительности. Так мы поступаем, например, заменяя реальную жидкость или газ с их сложным микроскопическим строением математической моделью непрерывной среды.

В ближайшей лекции мы проследим более подробно процесс возникновения математических структур из наблюдения и опыта на материале простейших стуктур: конечных упорядоченных множеств и натурального ряда целых положительных чисел. Во втором из этих примеров мы будем иметь дело уже с *бесконечной* структурой. Можно было бы усматривать корни математической идеи бесконечности в реальной бесконечности окружающего нас мира. Но эта ссылка не очень убедительна.

Чтобы понять это замечание, представим себе разумное существо, живущее в мире, обладающем лишь *конечной* сложностью, способном находиться лишь в *конечном* числе физически различных состояний и эволюционирующем в «дискретном времени», т. е. переходящем по определенному физическому закону

$$S(t) \to S(t+1)$$

из состояния $S(t)$ в момент времени t в состояние $S(t+1)$ в «ближайший следующий момент времени». Идея такого разумного существа представляется современной кибернетике логически непротиворечивой. Можно достаточно правдоподобно объяснить, как такое существо, неспособное по своей структуре исчерпать всю сложность окружающего его мира и сталкивающееся в его пределах со все более сложными системами, состоящими из очень большого числа элементов, создаст в процессе своей вполне практически и разумно направленной деятельности концепцию *бесконечного* натурального ряда. На практике оно будет применять общие теоремы, относящиеся к бесконечному множеству натуральных чисел, лишь к числам, ему практически доступным, и поэтому никогда не столкнется с фактом полной бессодержательности таких общих теорем о слишком больших числах в окружающем его конечном мире.

По существу, все связи между математикой и ее реальными применениями полностью умещаются в области конечного. В уже упомянутом случае описания реальных жидкостей и газов при помощи моделей в строгом математическом смысле непрерывных сред, эволюция которых управляется дифференциальными уравнениями в частных производных, при фактическом решении этих уравнений мы вновь возвращаемся в область конечного, например, применяя метод конечных разностей и ведя вычисления с заданным числом десятичных знаков. По существу, употребляемая нами конечная разностная схема вполне достаточна для получения всех реально интерпретируемых выводов, хотя микроскопическая структура реальной жидкости или газа так же непохожа на эту разностную схему, как и на непрерывную модель. В этом, как и во многих других случаях, мы предпочитаем непрерывную модель лишь потому, что она проще (большая простота обращения с дифференциалами и производными по сравнению с конечными приращениями и их отношениями общеизвестна).

Рассмотренный пример иллюстрирует безусловно правильный тезис Гильберта, что с точки зрения практических применений уже созданной математики достаточна содержательная истинность нефинитных выводов. Содержательная же истинность финитных выводов, полученных при помощи рассуждений, выходящих из области финитного, по Гильберту, требует лишь *непротиворечивости* формализованной математики. Секрет такого положения

вещей очень прост. Финитная часть математики, взятая сама по себе, содержательно истинна и, взятая сама по себе, *полна*: каждое финитное утверждение может быть установлено или опровергнуто финитными методами. *Вся практическая ценность математики бесконечного сводится к возможности при ее помощи получить финитные выводы проще и быстрее.*

Например, формула Стирлинга в виде точных неравенств

$$\sqrt{2\pi n}\cdot n^n\cdot e^{-n} < n! < \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n+\frac{1}{12n}}$$

позволяет получить хорошие оценки сверху и снизу для натуральных чисел $n!$ или

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

при больших m и n, которые было бы очень затруднительно найти прямым подсчетом, хотя ясно, что такой подсчет в принципе возможен и строго «финитен». Таким образом, все сводится к непротиворечивости формализованной математики. Но здесь и обнаруживается, что некоторого выхода за пределы финитного нам все же не удалось избежать. Во всех интересных случаях утверждение о непротиворечивости формального математического *исчисления* является утверждением, относящимся к *бесконечному* множеству выводимых в исчислении формул (в этом множестве не должны появляться одновременно формулы «А» и «не А»). Правда, множество всех формул, которые можно написать на «языке» любого данного исчисления, лишь счетно. Множества мощности большей, чем счетные, в математике не нужны. Но установление содержательно истинных предложений, относящихся к бесконечным счетным множествам, характерно для метаматематики.

В силу сейчас сказанного законно говорить о содержательной «математике метаматематики», хотя этот термин и не является установившимся. Эта математика метаматематики оказывается более широкой, чем «финитная математика» в строгом смысле. В некотором приближении можно сказать, что она по своему содержанию близка к упоминавшейся ранее «конструктивной математике», но обе значительно у́же традиционной «канторовской» теоретико-множественной математики.

Однако теоретико-множественная содержательно воспринимаемая математика в ее полном объеме имеет еще

эвристическое назначение. Формализованная теоретико-множественная математика никогда не была бы создана, если бы ее замысел не был доступен нашей интуиции. Вводя, например, аксиому о существовании общей точки у последовательности стягивающихся, вложенных друг в друга отрезков, мы ясно «видим» эту точку, хотя это ви́дение и является несомненным выходом за пределы непосредственно данного в опыте. По этому поводу следует вспомнить слова Гильберта о «канторовском парадизе», из которого мы не должны позволить себя изгнать. Всю свою работу по формализации математики и установлению непротиворечивости формализованной математики Гильберт считал подчиненной этой цели — сохранению для математиков блаженного существования в этом «канторовском парадизе».

Подведем итоги.

1. Содержательно интерпретируемая теоретико-множественная математика в ее полном объеме является логически незаконным обобщением непосредственного человеческого опыта, которое в начале нашего века было спасено от прямых противоречий путем введения некоторых ограничений. Тем не менее она является драгоценным источником математических моделей, находящих самое широкое применение при изучении реального мира и в человеческой практике.

2. Законность этих применений полностью гарантируется при соблюдении двух условий: финитная часть математики должна быть содержательно истинной и полной, а нефинитная часть, лишенная содержательной интерпретации и формализованная,— непротиворечивой.

3. Математическое рассмотрение строения формализованной математики не привело к формальному доказательству непротиворечивости формализованной математики элементарными средствами (при определенном ограничении этих средств такое доказательство и заведомо невозможно в силу знаменитой теоремы Гёделя), но редуцировало вопрос о непротиворечивости к очень простым утверждениям, которые могут быть сформулированы на языке небольшой части теоретико-множественной математики (математики метаматематики) и практически не вызывают у математиков больших сомнений, хотя эта «математика метаматематики» и не является в строгом смысле «финитной».

Мой обзор вопросов формализации математики и метаматематики был неизбежно очень беглым. Но он представ-

ляется мне необходимым для установления правильной перспективы в некоторых непосредственно школьных методических вопросах.

Пока сформулирую только некоторые, относящиеся к средней школе общие выводы.

Нарисованная картина современных представлений о строении математической науки несомненным образом слишком сложна для того, чтобы излагать ее в школьном курсе математики. Даже школьникам старших классов, проявляющим особый интерес к математике, рассказать о ней можно лишь немногое. Чрезмерная же вульгаризация здесь может привести к полной путанице.

Вместе с тем ясно, что цельная и наглядно убедительная картина строения всей нашей науки не может быть дана без описания теоретико-множественной концепции в ее содержательном (а не формализованном) варианте и в полном объеме, невзирая на то, что в своей нефинитной части она нуждается в более тщательном обосновании. Поэтому представляется несомненным, что основной позицией школьного курса математики должна быть позиция «*наивной теории множеств*».

Вопросы, относящиеся к теории алгоритмов и формальных символических исчислений, могут найти место в школьном преподавании, но не в аспекте их значения для формализации содержательной математики, а в аспекте чисто практическом.

В особенности это относится к *формализации логики*. Мы уже видели, что формализация математики не избавляет нас от необходимости рассуждать содержательно с целью получения *истины* в самом обычном общечеловеческом смысле этого слова. В таких рассуждениях мы применяем обычную *содержательную логику*. Ответственность преподавателей математики здесь особенно велика, так как отдельного предмета «логика» в школе нет и знакомство с началами логики практически в значительной мере происходит на уроках математики. При этом нет никаких оснований бояться широкого введения в школе символических обозначений и формул математической логики, записывая, например, правило силлогизма в виде $\left.\begin{matrix} A \subset B \\ B \subset G \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \subset G$ или схему доказательства «от противного» в виде $(\neg b \Rightarrow \neg a) \Leftrightarrow (a \Rightarrow b)$. Здесь дело идет о символической записи законов обычной общечеловеческой логики.

Преждевременные разговоры о существовании различных «логик», которые по аналогии с различными «геометриями» (евклидовой, Лобачевского и Римана и т. п.) могут исходить из различных систем аксиом, приведут к полной путанице понятий. Накоторые же встречающиеся в американских школьных учебниках замечания о «произвольности выбора логики» следует признать и ненаучными. Содержательные рассуждения о различных «логиках» в смысле логикоподобных исчислений неизбежно опираются на единую логику в собственном смысле слова.

2. НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

2.1. Будущие учителя в педагогических институтах обычно знакомятся с двумя способами построения арифметики натуральных чисел. Не предрешая пока вопроса об их сравнительном значении для школьного преподавания, я на первое место поставлю аксиоматический подход, который обычно связывают с именем Пеано *). При этом подходе натуральным рядом называют структуру

$$\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, 1, F),$$

состоящую из:

1) множества $\mathbb{N}$, элементы которого называются *натуральными числами*,

2) выделенного в этом множестве элемента 1, называемого *единицей*,

3) определенного на $\mathbb{N}$ отношения

$$F(x, y),$$

читаемого «*y непосредственно следует за x*», которая подчинена следующим требованиям (аксиомам):

I. *Единица не следует ни за каким другим натуральными числом.*

II. *Для любого натурального числа существует одно и только одно непосредственно следующее за ним натуральное число.*

III. *Любое натуральное число непосредственно следует не более чем за одним натуральным числом.*

IV. (Аксиома индукции). *Подмножество M множества* $\mathbb{N}$, *которое содержит элемент* 1 *и вместе с элементом x всегда содержит и элемент y, следующий непосредственно за x, совпадает со всем множеством* $\mathbb{N}$.

*) В действительности немного ранее аксиоматическая характеристика натурального ряда была дана в 1888 г. Дедекиндом.

Аксиомы I—IV независимы друг от друга. На рис. 92 изображены наглядно (отношение непосредственного следования символизируется стрелкой) примеры структур, для которых выполняются по три из четырех аксиом.

Но все структуры, удовлетворяющие всем высказанным выше требованиям, устроены «совершенно одинаково» — они *изоморфны* друг другу. Я надеюсь, что мои слушатели имеют о понятии изоморфизма достаточно ясные представления, позволяющие понимать дальнейшее изложение. Мы, впрочем, вернемся к уточнению этого понятия в одной из следующих лекций. В интересующем нас сейчас случае дело идет просто о том, что для всех структур

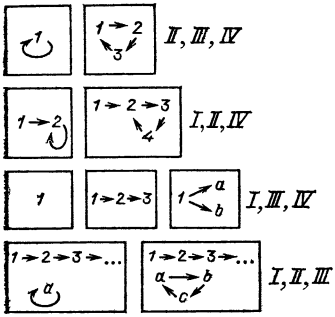


Рис. 92

$$\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, 1, F),$$
$$\mathfrak{N}^* = (\mathbb{N}^*, 1^*, F^*),$$

обладающих перечисленными свойствами, множество $\mathbb{N}$ отображается на множество $\mathbb{N}^*$ взаимно однозначно и с сохранением отношения непосредственного следования. Род структур, определяемый аксиомами Пеано, мономорфен. Можно из структур этого рода выбрать какую-либо одну (все равно какую!) за основную и при помощи ее элементов «нумеровать» элементы любой другой.

При последовательном проведении аксиоматического подхода так и говорят: природа элементов, из которых составлен натуральный ряд, не существенна; математики просто условливаются называть *натуральными числами* элементы множества $\mathbb{N}$ какой-либо определенной раз навсегда выбранной структуры $\mathfrak{N}$, удовлетворяющей аксиомам Пеано. Введенные таким образом натуральные числа могут получить много разных применений. Одним из применений является их употребление для обозначения числа элементов в том или ином конечном множестве, т. е. для обозначения *мощностей* конечных множеств.

Для дальнейшего нам существенно проделать этот путь: ничего не говоря об эквивалентности произвольных множеств и их мощностях, но предположив известными простейшие свойства натурального ряда

$$1, 2, 3, 4, \ldots,$$

получить определение конечного множества и поставить в соответствие каждому конечному непустому множеству M натуральное число $n(M)$ — число его элементов.

1. *Отрезком* натурального ряда будем называть любое собственное подмножество множества $\mathbb{N}$, которое вместе с $x \neq 1$ непременно содержит и число, непосредственно предшествующее x.

2. Можно доказать, что непустой отрезок натурального ряда полностью определяется своим «последним элементом», т. е. принадлежащим ему числом n, для которого непосредственно следующее число уже не входит в отрезок. Отрезок с последним элементом n будем обозначать $[1; n]$.

3. Множество будем считать *конечным*, если оно может быть взаимно однозначно отображено на отрезок натурального ряда.

4. Можно доказать, что конечное множество может быть взаимно однозначно отображено только на *один-единственный* отрезок натурального ряда.

5. Если множество M отображается взаимно однозначно на отрезок $[1; n]$ то, по определению

$$n(M) = n.$$

Ясно, что таким образом каждому непустому конечному множеству M мы поставили в соответствие вполне определенное натуральное число $n(M)$ — число элементов множества M.

2.2. Другое построение арифметики натуральных чисел связывается с именем Кантора. Здесь понятие числа элементов конечного множества воспринимается просто как частный случай общего понятия *мощности* любого множества. Мощности называют, следуя Кантору, также *кардинальными числами*. Напомню вкратце способ их введения.

1. В основе лежит понятие в з а и м н о о д н о з н а ч н о г о отображения одного множества на другое. Если множество M может быть взаимно однозначно отображено на множество M', то M эквивалентно M':

$$M \sim M'.$$

2. Отношение эквивалентности обладает свойствами *рефлексивности*, *симметричности* и *транзитивности*:

а) $M \sim M'$,

б) если $M \sim M'$, то $M' \sim M$,
в) если $M_1 \sim M_2$ и $M_2 \sim M_3$, то $M_1 \sim M_3$.

Из этого делается вывод, что любому множеству M можно приписать характеристику Card (M), обладающую тем свойством, что

$$\text{Card}\,(M) = \text{Card}\,(M'),$$

если M и M' *эквивалентны*, и

$$\text{Card}\,(M) \neq \text{Card}\,(M'),$$

если M и M' *не эквивалентны*. Card (M) и есть *мощность* M.

З а м е ч а н и е. При желании заменить такое описательное, косвенное определение Card (M) прямым говорят, что Card M есть просто класс всех M', эквивалентных M. Я не настаиваю на этом замечании, так как его полное понимание требовало бы разъяснения различия между множеством и классом. Как известно, «множество всех множеств» противоречиво. При формализации математики употребляются и другие способы явного определения понятия мощности *).

3. Мощность пустого множества $\varnothing$ называют кардинальным числом *нуль*:

$$0 = \text{Card}\,(\varnothing).$$

Мощности непустых конечных множеств в этой концепции натурального числа п о о п р е д е л е н и ю и являются *натуральными числами*.

Как видим, при таком построении теории натуральных чисел мы нуждаемся в том или ином определении понятия «конечное множество». В этом отличие второго пути от первого, названного выше аксиоматическим, при следовании которому, имея уже готовый натуральный ряд чисел, мы называем конечными множества, эквивалентные отрезкам натурального ряда (по данному выше определению к их числу относится и «пустой» отрезок, который есть не что иное, как пустое множество $\varnothing$).

Я не буду здесь останавливаться на разных возможных формальных определениях понятия конечного множества, не опирающихся на уже готовое представление о натуральном ряде, так как не знаю среди них такого,

*) В «Теории множеств» Н. Бурбаки (гл. III, § 3. 1)

$$\text{Card}\,(M) = \tau_Z\,(Eg\,(M,\ Z)).$$

которое могло бы служить опорой построения начального школьного курса арифметики. В наше время считается возможным требовать от школьников понимания различия между конечными и бесконечными множествами очень рано. (О нем говорится в учебниках для IV класса, претендующих на то, чтобы в ближайшем будущем сделаться у нас массовыми.) При этом говорится либо, что конечные множества — это те, все элементы которых можно «выписать», «указать» один за другим, либо, что это множества, элементы которых можно «сосчитать». В первом случае мы имеем дело с весьма приблизительным описанием, а во втором — ссылаемся на пересчет, т. е. на сопоставление элементов множества с последовательными натуральными числами, т. е. предполагаем уже сформированным понятие о натуральном ряде.

С точки зрения выбора идейной основы для начального курса подход к числам как к мощностям множеств обладает одним неоспоримым достоинством. Естественное при этом подходе определение сложения и умножения достаточно адекватно отображает основной круг практических применений этих действий над натуральными числами и числом нуль. Об этом я еще буду говорить далее.

В заключение замечу, что представляющие интерес для школьного курса математики бесконечные множества имеют одну из двух мощностей: $\aleph_0$ — мощность множества натуральных чисел, или $\aleph$ — мощность множества действительных чисел *). На рис. 93 напоминается важная особенность бесконечных множеств: они эквивалентны некоторым своим правильным частям.

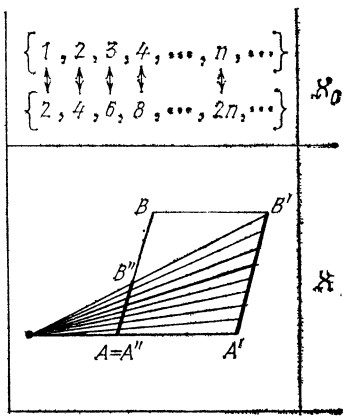


Рис. 93

2.3. К Кантору восходит и третья возможность: воспринимать натуральные числа как частный случай по-

*) Мощность множества всех числовых функций больше $\aleph$, но, по существу, это множество в школьной математике не используется. Множества же непрерывных или кусочно-непрерывных функций имеют уже только мощность $\aleph$.

рядковых типов. Для полноты картины нам полезно познакомиться и с ней.

Два упорядоченных множества *)

$$\mathfrak{M}_1 = (M_1, \underset{1}{\dashv}) \quad \text{и} \quad \mathfrak{M}_2 = (M_2, \underset{2}{\dashv})$$

называются *подобными*, если множестве M_1 можно взаимно однозначно отобразить на множество M_2 с сохранением порядка, т. е. так, что отношение

$$x_1 \underset{1}{\dashv} y_1$$

равносильно отношению

$$x_2 \underset{2}{\dashv} y_2$$

для образов x_2 и y_2 элементов x_1 и y_1. Отношение подобия рефлексивно, симметрично и транзитивно. Поэтому для упорядоченных множеств можно ввести характеристику $\mathrm{Ord}(\mathfrak{M})$, обладающую тем свойством, что

$$\mathrm{Ord}(\mathfrak{M}_1) = \mathrm{Ord}(\mathfrak{M}_2)$$

в том и только в том случае, когда $\mathfrak{M}_1$ подобно $\mathfrak{M}_2$.

$\mathrm{Ord}(\mathfrak{M})$ и есть *порядковый тип* упорядоченного

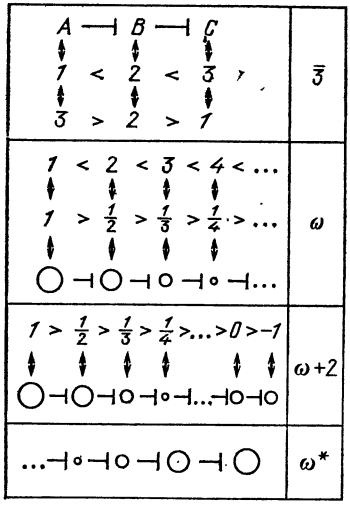


Рис. 94

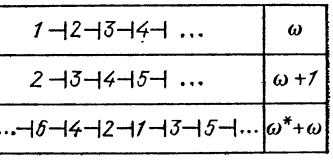


Рис. 95

множества M. На рис. 94 изображены упорядоченные множества порядковых типов $\bar{3}$, ω, $\omega + 2$, ω^*. Смысл многоточий на схематических изображениях упорядоченных

*) На одном и том же множестве M можно многими способами ввести отношение порядка $\dashv$, поэтому называть упорядоченное множество $(M, \dashv)$ просто «упорядоченным множеством M» можно только в порядке «вольности речи».

множеств типов ω, $\omega + 2$ и ω^*, надеюсь, достаточно понятен.

Вводя в одном и том же множестве отношение порядка разными способами, можно получить различные упорядоченные множества, которые не обязаны быть подобными. На рис. 95 показано, как при различных упорядочениях множества $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел возникают упорядоченные множества типов ω, $\omega + 1$ и $\omega^* + \omega$.

Но такого рода сложения невозможны в случае конечного множества M. Упорядоченное множество $(M, \dashv)$ называется *конечным*, если конечен его носитель. Для конечных упорядоченных множеств их порядковый тип $\mathrm{Ord}\,(M, \dashv)$ полностью определяется мощностью $\mathrm{Card}\,(M)$ их носителей. Поэтому последовательность *конечных порядковых типов*

$$\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \ldots$$

находится в естественном взаимно однозначном соответствии с конечными мощностями в смысле п. 2.2

$$\bar{\bar{0}}, \bar{\bar{1}}, \bar{\bar{2}}, \bar{\bar{3}}, \ldots$$

2.4. Таким образом, перед нами имеются на выбор по крайней мере три возможности: считать «натуральными числами по преимуществу»:

1) мощности

$$\bar{\bar{1}}, \bar{\bar{2}}, \bar{\bar{3}}, \bar{\bar{4}}, \ldots,$$

2) порядковые типы

$$\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \ldots,$$

3) произвольно выбранную последовательность

$$1, 2, 3, 4, \ldots$$

элементов структуры, подчиненной аксиомам Пеано.

Начну с исторической справки. Кантор, создавший теорию мощностей и порядковых типов, как уже было указано, называет мощности *кардинальными* числами. *Ординальными* числами Кантор называет не любые порядковые типы, а только порядковые типы *вполне упорядоченных множеств*, т. е. таких упорядоченных множеств, у которых каждое подмножество имеет первый элемент. Так как Кантор не признает пустого множества, то его трансфинитный ряд кардинальных чисел начинается с $\bar{\bar{1}}$:

$$\bar{\bar{1}}, \bar{\bar{2}}, \bar{\bar{3}}, \ldots, \aleph_0, \aleph_1, \ldots$$

На неизвестном месте в этом ряду находится «мощность континуума» — кардинальное число $\aleph$.

Трансфинитный ряд ординальных чисел начинается с ординального числа 1:

$$\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega \cdot 2,$$
$$\omega \cdot 2 + 1, \ldots, \omega^2, \ldots, \Omega, \ldots$$

В этом ряду очень много порядковых типов упорядоченных множеств, носители которых имеют одну и ту же мощность $\aleph$. Таковы порядковые типы

$$\omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \ldots, \omega^2, \ldots, \omega^\omega, \ldots$$

и, вообще, все предшествующие «первому ординальному числу третьего класса» Ω.

Конечные кардинальные и конечные ординальные числа, по Кантору, оказываются тоже объектами различной природы, но он говорит несколько неопределенно, что они «совпадают по своим свойствам». После рассмотрения свойств конечных кардинальных чисел Кантор объявляет, что тем самым указан самый естественный путь построения обычной традиционной арифметики натуральных чисел. Кантор мог бы сказать то же самое и по поводу конечных ординальных чисел. Предпочтение, отданное в этом отношении кардинальным числам, может быть объяснено просто тем, что они рассмотрены первыми.

Дедекинд, по-видимому, был первым, кто при сравнении очерченных выше трех подходов к построению теории натуральных чисел сознательно отдал предпочтение аксиоматическому пути, который мы рассмотрели первым, а при перечислении в начале этого пункта поставили третьим. В письме Веберу (24/I 1888 г.) он довольно подробно говорит об этом. Употребление натуральных чисел для обозначения мощностей конечных множеств он считает лишь *одним из их применений*. С этой дедекиндовской точки зрения естественно считать *другим применением* тех же натуральных чисел обозначение конечных порядковых типов. *Третьим применением*, хотя и тесно связанным со вторым, является употребление натуральных чисел для *нумерации* элементов конечных упорядоченных множеств и упорядоченных множеств типа ω, как чаще говорят,— для нумерации элементов *последовательностей*.

2.5. Следует, однако, вспомнить то, что было сказано в первой лекции: аксиоматическое рассмотрение структур

какого-либо рода бессодержательно, если не установлена *совместность* аксиом, т. е. существование хотя бы одной структуры данного рода.

Теория множеств обладает и более простыми средствами для построения модели, в которой выполнены аксиомы Пеано, чем употребление для этой цели конечных мощностей или конечных порядковых типов. Довольно популярен такой способ:

$$1 = \{\varnothing\},\ 2 = \{\{\varnothing\}\},\ 3 = \{\{\{\varnothing\}\}\},\ \ldots$$

Единицей объявляется множество, единственным элементом которого служит пустое множество. Отношение непосредственного следования сначала определяется для любого множества: за множеством M непосредственно следует множество

$$M' = \{M\},$$

единственным элементом которого служит множество M. Натуральный ряд *определяется как наименьшее множество множеств, содержащее* $1 = \{\varnothing\}$ *и вместе с* M *содержащее* $M' = \{M\}$.

Однако для логического оправдания любого такого построения нужны, конечно, некоторые допущения. У Н. Бурбаки одним из таких допущений является аксиома существования хотя бы одного бесконечного множества. Мы условились в первой лекции не входить слишком глубоко в вопросы логических оснований математики. Но, возвращаясь к сказанному в первой лекции, заметим, что неограниченно продолжающиеся последовательности существенно входят в основные рассмотрения математики. Поэтому мы сейчас находимся как раз в той области, где никакая формализация не может нас избавить от содержательной интерпретации понятий. Мы должны сделать содержательные допущения, позволяющие говорить о неограниченно продолжающихся последовательностях, т. е., по существу, *о моделях натурального ряда.*

Идея последовательности элементов, обладающей свойствами, выраженными аксиомами Пеано, столь проста, что представляется законным допущением о существовании такой последовательности и сделать непосредственно исходным допущением, рассматривая его как известное обобщение данных опыта и наших наглядных представлений. Я думаю, что ничего не изменилось со времен Кронекера и Пуанкаре, которые считали, что известные возможности замены этого допущения какими-либо другими не

содержат в себе существенного прогресса. Например, для того чтобы убедиться в законности допущения о существовании бесконечного множества, по-видимому, проще всего опереться на представление о возможности построения бесконечной последовательности при помощи перехода от каждого ее элемента к непосредственно следующему.

Подведем итог наших общих рассмотрений. Математикам, по существу, нужен один натуральный ряд чисел, который может обслуживать все их нужды. Свойства этого натурального ряда, существенные для математиков, полностью описываются аксиомами Пеано. С научной точки зрения представляется законным считать существование модели, в которой эти аксиомы выполнены, исходным допущением, являющимся непосредственным обобщением данных опыта и наших наглядных представлений (мысленного эксперимента). Модель, в которой натуральные числа являются мощностями конечных множеств, по способу ее построения не является самой простой, и делать ее исходной логически не обязательно.

2.6. Ясно, что начальное обучение арифметике натуральных чисел должно быть наглядным, и не обязательно следовать ни аксиоматическому, ни какому-либо другому разработанному математиками последнего столетия способу логического построения теории натуральных чисел. Но это не значит, что начальный курс арифметики не должен иметь ясного логического строения, которым сознательно руководствуются авторы учебника и учителя.

Формирование представлений о натуральных числах в сознании детей начинается задолго до школы, а в школьном возрасте регулируется не только школьным обучением, но и непосредственным участием детей в практической жизни. Поэтому крайне желательно, чтобы лежащая в основе школьного курса логическая схема была по возможности близка к реальным путям формирования первых представлений о натуральных числах. Если бы народная традиция здесь оказалась в противоречии с наиболее совершенными научными концепциями, то еще следовало бы основательно подумать, чему отдать предпочтение. Возможность такого конфликта между требованиями науки и традицией наметилась в последнее время потому, что некоторые методисты слишком уверовали в логическую обязательность очерченного выше, в п. 2.2,

пути, в котором четкое оформление понятия эквивалентности множеств предшествует счету. Мы уже видели, что наука вовсе не требует признания за концепцией, идентифицирующей натуральные числа с конечными мощностями, какого-либо исключительного и преимущественного положения.

По данным же истории культуры и наблюдениям за развитием детей школьного возраста можно установить, что прямое формирование понятий о мощностях, не опирающееся на процесс последовательного пересчета, останавливается на самых первых шагах. Чтобы продвинуться дальше, люди обращаются к той или иной заранее заготовленной последовательности знаков.

Наличие во многих языках «двойственного числа» показывает, что формирование представления о сходстве всех множеств мощности 2 могло быть самостоятельным этапом человеческой мысли, на котором различались лишь «один», «два» и «много». О том же говорит особое положение в русском языке слова «пара», которое логически должно было бы быть первым членом последовательности {пара, тройка, четверка, . . .,}, но не похоже по способу образования на следующие члены этой последовательности (мы говорим упорно «пара лошадей», а не «двойка лошадей», хотя последнее и соответствовало бы дальнейшим «тройке лошадей» и «шестерке лошадей»). Особенности согласования русских числительных говорят о том, что такое индивидуальное отношение существовало и к мощностям 3 и 4:

два стула,
три стула,
четыре стула,
пять стульев,
шесть стульев,...

Только с пяти стульев устанавливается единообразие, продолжающееся неограниченно:

десять стульев,
сто стульев,
тысяча стульев,...

Специалист по теории множеств Иван Иванович Жегалкин утверждал даже в своих лекциях 1920—1921 гг., что у детей иногда представление о четырех предметах формируется р а н е е, чем представление о т р е х предметах, по той причине, что дети часто встречаются с

четырьмя лапами у кошки, четырьмя ножками у стола *) и т. п., но не имеют вокруг себя стандартных троек предметов.

Но это мнение И. И. Жегалкина, кажется, не было подтверждено точными наблюдениями. Во всяком случае и здесь гипотеза формирования понятий о начальных мощностях без обращения к счету по порядку относится лишь к начальным мощностям $\leqslant 4$.

Наблюдения психологов над восприимчивостью человека к ритму говорит о том, что без пересчета и без разбиения на подгруппы люди легко различают группу последовательных четырех ударов от группы из пяти, а различение группы из пяти ударов от группы из шести уже лежит на пределе их возможностей. Лишь при привычке отбивать такт, например тройками, легко отличается

000 000 000)))))0

от

000 000 000 000 00

и т. п. Не случайно шестистопный классический ямб в отличие от пятистопного решительно нуждается в цезуре.

Там, где отказывает способность интуитивно схватывать «равночисленность» множеств, помогает, как уже говорилось, счет.

Так как мы не учим теперь детей продолжать счет с пальцев рук на пальцы ног, то вполне естественно, что и родители и дети с удовольствием заготовляют заранее последовательность слов

один, два, три, четыре, пять, шесть, семь, восемь,
девять, десять, одиннадцать, двенадцать, тринадцать, (1)
четырнадцать, пятнадцать, . . .

Сопоставление элементов произвольного множества с элементами начального отрезка этой последовательности является более простой, а к моменту поступления в школу уже и более привычной для ребенка операцией, чем непосредственное сопоставление элементов двух множеств.

Особенно же существенно, что каждый ребенок в самом деле на многократном опыте убеждается в основном положении, что *пересчет элементов одного и того же множества, проводимый в различном порядке, всегда заканчивается на одном и том же члене стандартной последовательности слов* (1).

---

*) В 1920 г. столы еще имели, как правило, четыре ножки.

При овладении общим понятием «числа элементов множества» люди поступают по Дедекинду, а не по Кантору. Независимое же от счета непосредственное овладение понятием мощности на достаточно обширном материале и мысленных экспериментах является, по-видимому, лишь созданной теоретиками функцией (кроме, как уже говорилось, быть может, самых первых мощностей 1, 2, 3, 4).

Независимое от счета овладение общим понятием мощности, хотя бы и только в применении к конечным множествам, требовало бы обращения к обширному запасу наблюдений, подтверждающему транзитивность эквивалентности и невозможность эквивалентности множества своей части. Можно достаточно уверенно утверждать, что в действительности понимание обоих этих фактов достигается лишь через обращение к счету при помощи стандартной последовательности слов ли, пальцев ли, безразлично.

2.7. Теперь мы, по существу, уже достаточно подготовлены к тому, чтобы наметить логическую схему, могущую служить для преподавателя путеводной нитью при начальном обучении арифметике в младших классах, быть постепенно доведенной до сознания учащихся в средних классах, а в старших — подвести и к настоящему научному обсуждению природы натурального числа. Но перед этим полезно еще одно замечание относительно терминологии. В грамматике различают *количественные* и *порядковые числительные*. Но это различение не имеет прямого отношения к различию между кардинальными и ординальными числами Кантора.

Порядковые числительные, подобно прилагательным, не являются *именами* каких-либо новых *предметов*. Математик может употреблять *слова*

первый, второй, третий, . . .,

чтобы, например, наименовать первый, второй, третий член какой-либо последовательности

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

Но эти словоупотребления не дают ему повода для введения особых «порядковых чисел».

Количественные числительные

один, два, три, четыре, пять, . . ., сто, . . .,
тысяча, . . ., миллион, . . .

имеют два основных значения:

а) в соединении с наименованием рода предметов они обозначают *множество соответствующей численности*:

два мальчика,
пять яблок,
тысяча яиц и т. п;

б) они являются *именами чисел*.

Так как существует только одно число «пять» и одноединственное число «тысяча», то при употреблении во втором смысле количественные числительные по самому их смыслу не допускают множественного числа. У большинства из них вообще нет множественного числа, хотя при употреблении числительных в смысле а) с точки зрения логики его наличие было бы естественно, как это имеет место для тысячи, миллиона и миллиарда. Для других количественных числительных множественное число образуется не от них непосредственно, а от слов

пара, тройка, . . ., десяток, . . ., сотня, . . .

Мы говорим:

три пары лошадей,
много десятков яблок,
две тысячи яиц,
много миллионов птиц

и т. д.

Одной из важных задач при начальном обучении арифметике является доведение до полной ясности употребления числительных в качестве собственных имен чисел. Известно, что выражение «пять взять четыре раза» еще долго кажется детям более понятным, чем «пять умножить на четыре». Из-за архаичности грамматики задача эта довольно деликатна. Школьник должен понимать, что существует только одно число «тысяча», но имеется и число «три тысячи», а три тысячи яиц реально могут состоять из трех тысяч — «первой тысячи» в одном ящике, «другой тысячи» — во втором ящике и «третьей тысячи» в третьем ящике.

Эти неизбежные терминологические трудности были бы еще осложнены при попытке вводить в элементарный курс арифметики различение «количественных» и «порядковых» чисел. К счастью, оно совершенно не нужно в школе и совсем не обязательно при научном построении арифметики натуральных чисел.

2.8. Дошкольная стадия овладения арифметикой натуральных чисел неизбежно синкретична. Семилетний

ребенок, приходящий в школу, конечно, уже много раз пересчитывал предметы, пользуясь начальным участком последовательности слов

один, два, три, четыре, пять, . . .,

привык говорить о числе тех или иных предметов; видя три яблока и две груши, понимает, что яблок больше, чем груш, и т. п. В реальном общении с окружающими эти навыки образуются без строгой системы и часто основаны лишь на частичном понимании. Я не специалист по дошкольному воспитанию, но думаю, что здесь с некоторой бессистемностью и не надо бороться.

Но в школе начинается формирование определенной системы знаний о натуральных числах. Эта система, как уже говорилось, будет лишь постепенно осознаваться все более полно, оставаясь, по существу, достаточно твердой.

1°. Порядок. Часто приходится располагать предметы в определенном порядке: буквы в алфавите, людей в очереди, цифры

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Расположенные по порядку буквы или цифры можно употреблять для обозначения расположенных по порядку предметов другой природы: в школьном коридоре один за другим расположены

класс А, класс Б, класс В, класс Г,

на улице — дома с номерами

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Букв или цифр может не хватить для обозначения расположенных по порядку предметов. После буквы Я можно пустить в употребление пары букв

АА, АБ, АВ, . . .,

после цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 — номер 10, 11, 12, 13. . .

Пользуясь номерами, составленными из цифр, говорят о *нумерации*, или *пересчитывании*, предметов.

2°. Натуральные числа. Нельзя ли распорядиться так, чтобы номеров хватило во всех случаях, как бы много предметов ни пришлось пересчитывать? Для этого надо, чтобы ряд номеров продолжался «неограниченно». Этого люди и достигли, создав *натуральный*

ряд чисел. Не важно, из чего он составлен. Слова разных языков

один, два, три, четыре, . . .
one, two, three, four, . . .

или записи при помощи цифр

1, 2, 3, 4, . . .

можно считать лишь разными названиями последовательных натуральных чисел.

3°. Численность множества. Элементы множества можно нумеровать числами (пересчитывать)

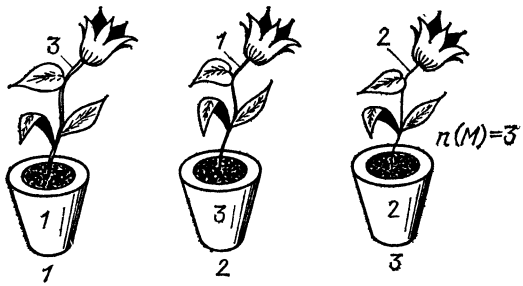


Рис. 96

в разном порядке. Пересчет заканчивается всегда на одном и том же числе (рис. 96). Получаем *число элементов множества* (его численность)

$$n\,(M).$$

Замечание. Позднее учащиеся познакомятся с множествами, пересчет которых никогда не закончится.

4°. Сложение чисел естественно с самого начала связывать с операцией соединения непересекающихся множеств

$$n = n_1 + n_2,$$

если

$$n_1 = n\,(M_1), \quad n_2 = n\,(M_2), \quad M_1 \cap M_2 = \varnothing,$$
$$n = n\,(M_1 \cup M_2),$$

считая последовательное присчитывание (рис. 97) лишь способом его выполнения. Только при таком подходе коммутативность и ассоциативность достаточно очевидны.

5°. Умножение без нарушения принятой логической концепции могло бы проявиться тремя способами:

а) $n = km$ как численность соединения m непересекающихся множеств численности k каждое,

б) как результат сложения m слагаемых, равных k,

в) как число пар (x, y), где x берется из множества численности k, а y — из множества численности m.

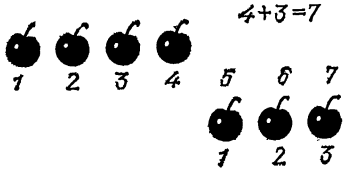


Рис. 97

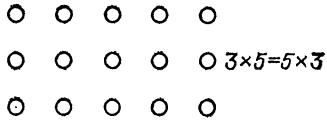


Рис. 98

Последний из этих способов имеет то достоинство, что делает наглядно убедительным коммутативность умножения, но попытки положить его в основу первого знакомства с умножением мне кажутся методически неубедительными. Наглядная убедительность коммутативности умножения легче достигается не обращением к общей идее множества пар, а непосредственно на геометрической модели со счетом по строкам и столбцам (рис. 98).

Что касается первых двух способов, то само различие между ними в младших классах, вероятно, останется незамеченным, хотя логически оно и несомненно: первый подход требует установления независимости результата от выбора множеств, а второе определение уже по форме доставляет непосредственно операцию над самими числами.

Следование этой схеме в первых классах не предполагает обязательного введения слова «множество». Тем более не обязательны обозначения. Но уже в п. 3° естественно расширение системы чисел введением *нуля*.

При постепенном углублении представлений об основах арифметики в средних и старших классах без всякой ломки общей схемы происходит следующее:

1□. Вводится явное определение *порядка* и *упорядоченного множества*. Находится число разных способов $n!$ ввести порядок на конечном множестве из n элементов.

2□. Объясняется, что само множество натуральных чисел есть частный пример упорядоченного множества. Его устройство характеризуется полностью теми или иными свойствами, равносильными аксиомам Пеано.

Подробно излагается история формирования идеи бесконечности натурального ряда.

В IX классе при прохождении темы «Принцип математической индукции» в основу кладется аксиома IV из первого пункта этой статьи. Желательно здесь и более широко рассказать об аксиоматической характеристике устройства натурального ряда «с точностью до изоморфизма», произнося или не произнося само слово «изоморфизм».

3□. Устанавливается, что конечные множества тогда и только тогда взаимно однозначно отображаются друг на друга, когда они имеют одно и то же число элементов n. Устанавливается, что число отображений равно $n!$

В факультативном порядке в старших классах дается понятие об эквивалентности и мощностях бесконечных множеств. Мощности конечных множеств остаются просто числами n (M). Мощности бесконечных множеств можно называть *трансфинитными числами*, подчеркнув своеобразие этого направления обобщения понятия числа*). Термин «кардинальные числа» и здесь остается излишним**), хотя на этом этапе на факультативных занятиях с любителями математики знакомство с различными, не согласованными между собой вариантами терминологии уже не страшно, а может быть, и полезно.

4□ и 5□. При прохождении темы «Принцип математической индукции» естественными примерами *индуктивных определений* могут явиться индуктивные определения:

а) сложения

$$a + 1 = a',$$
$$a + b' = (a + b)',$$

б) умножения

$$a \cdot 1 = a,$$
$$a \cdot b' = a \cdot b + a.$$

В связи с этим естественно рассказать о возможности последовательного развития теории натуральных чисел непосредственно из аксиом Пеано. Впрочем, фактическое проведение этого замысла громоздко, и мне оно кажется не особенно благодарным даже для занятий со школьниками — любителями математики.

---

*) Как известно, не существует разумной системы чисел, в которую вместе входили бы действительные числа $\aleph_0$ или $\aleph$.

**) Для Кантора наименование мощностей «кардинальными числами» служило для фиксации внимания на их отличии от его «ординальных чисел».

Если в факультативном порядке школьников знакомят с мощностями, то естественно применить к ним те же определения сложения.

При занятиях комбинаторикой естественно указать на логичность и изящество определения произведения *как числа пар*.

Если в факультативном порядке школьники знакомятся с мощностями бесконечных множеств, то естественно для них определить сложение и умножение (здесь уже сразу как мощность множества пар).

6□. Понятие порядкового типа упорядоченного множества — благодарная тема для факультативных и кружковых занятий. Очень живо проходит знакомство со сложением и умножением порядковых типов, на которых сразу обнаруживается нарушение коммутативности этих действий (рис. 99). Тема эта несколько изысканна, но

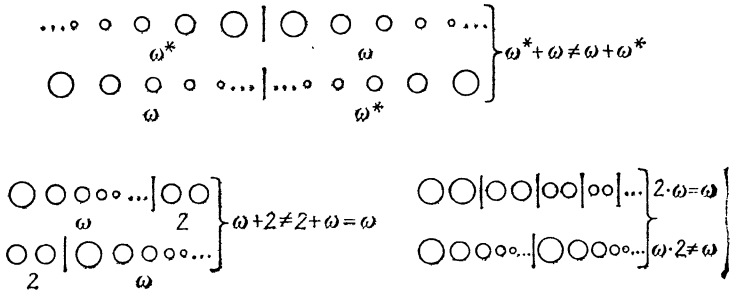


Рис. 99

поучительна для настоящих любителей математики, в частности, и тем, что по-новому освещает различные возможности построения арифметики обычных натуральных чисел.

Собственно ординальных чисел Кантора, т. е. специального изучения порядковых типов *вполне упорядоченных* множеств я здесь касаться не буду, так как это увело бы нас уже слишком далеко от основной темы этой лекции.

3. ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ ЧИСЛА. НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Исходным будем считать запас неотрицательных целых чисел

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Множество всех этих чисел будем обозначать $\mathbb{Z}_0$. На множестве $\mathbb{Z}_0$ будем считать заданными операции сложения и умножения и отношение неравенства $x < y$. В таком положении находятся современные школьники, когда они впервые встречаются в школьном курсе с числами дробными или отрицательными.

Равноправное положение нуля в системе неотрицательных целых чисел легко воспринимается школьниками, которые привыкли не бояться ответа «нуль» на вопрос «сколько» (имеется книг на языке суахили в школьной библиотеке и т. п.) и пресловутого «пустого» множества. Числа из $\mathbb{Z}_0$ достаточны для обозначения численностей конечных множеств, т. е. всех тех множеств, которые могут быть фактически «пересчитаны». Жаль, что для чисел из $\mathbb{Z}_0$ нет короткого выразительного названия. Приходится говорить «натуральные числа и нуль».

Далее мы будем иметь дело с последовательными этапами обобщения понятия числа, которые можно расположить в виде приведенной на рис. 100 схемы.

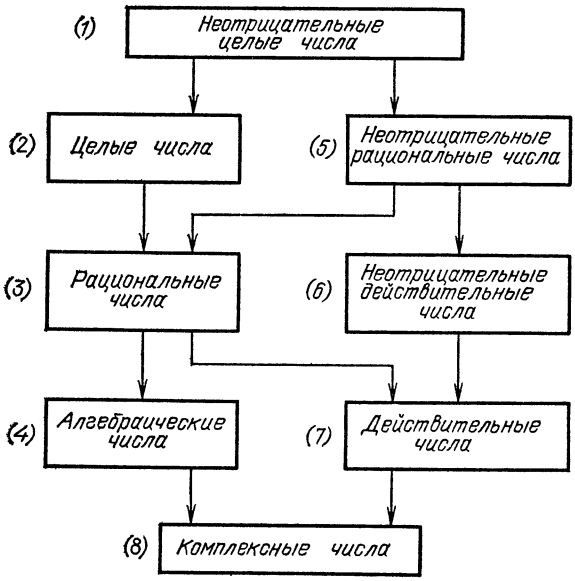


Рис. 100

Я включил в схему поле алгебраических чисел, которое остается за пределами кругозора школьников даже и большинства наших специализированных математи-

ческих школ. Но для полного понимания мотивов, приведших математиков к завершающему этапу — построению поля всех комплексных чисел, нам придется хоть немного поговорить и о поле алгебраических чисел. Мои слушатели встречались с ними в курсе алгебры педагогических институтов. Как будет подчеркнуто далее, с точки зрения *чистой алгебры* естественный ряд обобщений идет по пути

$$(1) \to (2) \to (3) \to (4),$$

а на алгебраических числах заканчивается.

В школе обобщение идет по пути

$$(1) \to (5) \to (3) \to (7) \to (8)$$

— запас неотрицательных целых чисел сначала пополняется положительными дробными числами (по новым программам в III—IV классах), лишь после этого рациональными отрицательными (по новым программам в V классе) и много позднее — иррациональными действительными и мнимыми числами.

Довольно большая группа методистов при разработке новых программ настаивала на том, что путь

$$(1) \to (2) \to (3)$$

«логичнее» и что в соответствии с этим и в начальных классах отрицательные целые числа должны появиться ранее дробных. Я не ставлю перед собой задачи решать чисто методические вопросы, но прошу читателей обратить внимание на то, что естественность обращения к отрицательным целым числам и лишь потом к дробным имеет место только в чисто *алгебраической концепции обобщений понятия числа*, которая вообще обрывается на пути

$$(1) \to (2) \to (3) \to (4).$$

Выход за пределы алгебраических чисел и создание системы действительных чисел имеет совсем другую мотивировку, связанную с употреблением чисел при *измерении скалярных величин*.

В свое время в старших классах школьники были в состоянии вполне сознательно отнестись к идее расширения первоначального запаса чисел, исходящей из задачи сделать неограниченно выполнимой операцию вычитания и выполнимой, за неизбежным исключением деления на нуль, операцию деления. Задача построения

таких расширений, сохраняющих основные свойства сложения и умножения, по моему опыту, вполне доступна интересующимся математикой учащимся старших классов. Но надо ясно представлять себе, что серьезную образовательную ценность знакомство с этим кругом идей приобретает только в том случае, если учащиеся поймут точную постановку задачи разыскания минимального расширения, обладающего заданными свойствами, и смысл теоремы о существенной единственности такого расширения (единственности с точностью до изоморфизма!).

В младших классах вопросы «Можно ли из меньшего вычесть большее?», «Можно ли, например, из 3 вычесть 5?» вызовут оживление в классе и при умелом руководстве учителя послужат началом овладения вычислениями с отрицательными числами. Но без связи с конкретными применениями все это будет восприниматься как забавная игра. Вопрос же «Можно ли разделить 3 пополам?» покажется более естественным. Нормальные семилетние дети решат его без помощи учителя, поняв, конечно, конкретным образом: чтобы разделить пополам три яблока, надо одно из них разрезать на две равные части, каждый получит по полтора яблока.

Поэтому мне представляется разумным сохранение в том проекте новых программ, который будет проводиться в жизнь в ближайшие годы, традиционного порядка

$$(1) \to (5) \to (3) \to (7).$$

Намечается лишь некоторое ускорение движения по этому пути. Последний шаг традиционной схемы

$$(7) \to (8)$$

новые программы оставляют на долю факультативных занятий. Об этом сокращении обязательного курса математики в средней школе идут большие споры, к которым я в своих лекциях еще вернусь в надлежащем месте.

Положительные дробные числа. Первый шаг обобщения понятия числа

$$(1) \to (5)$$

состоит в пополнении запаса

$$\mathbb{Z}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\},$$

неотрицательных целых чисел дробными положительными числами. В результате получается множество $\mathbb{Q}_0$ всех неотрицательных рациональных чисел *).

Первое важное для методики работы со школьниками III—V классов замечание относится к самому результату этого шага. Любое число

$$x \in \mathbb{Q}_0$$

может быть записано в виде дроби

$$x = \frac{m}{n}, \quad m \in \mathbb{Z}_0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Но дробей с неотрицательным целым числителем и натуральным знаменателем, пригодных для записи одного и того же числа, много. Дроби

$$\frac{2}{3} = \frac{6}{9} = \frac{22}{33}$$

являются просто разными записями одного-единственного числа «две трети». В IV классе школьники встретятся еще с записью чисел в виде десятичных дробей:

$$0{,}25 = 0{,}250 = \frac{1}{4}.$$

Представляется правильным считать и процентные записи просто записью чисел:

$$25\% = 0{,}25 = \frac{1}{4}; \quad 350\% = 3{,}5 = 3\frac{1}{2}.$$

Твердое усвоение различия между понятиями «дробь» и «дробное число» при современном построении школьного курса математики следует считать совершенно обязательным. Увидев на доске записи

$$0{,}40;\ \frac{0}{100};\ 0{,}4;\ \frac{6}{3};\ 0;\ \frac{2}{5};\ \frac{3}{5};\ 0{,}33,$$

школьники должны без затруднений отвечать на вопросы: 1) Сколько *различных* чисел здесь написано? (Пять). 2) Сколько среди этих чисел *дробных*? (Три). 3) Сколько — *целых*? (Два).

Следует особо подчеркнуть, что без ясного понимания различия между числом и способом его записи нельзя осмысленно применять к числам язык теории множеств.

*) В пояснение логики выбранных обозначений укажу, что далее множество всех целых чисел обозначается $\mathbb{Z}$, а множество всех рациональных чисел обозначается $\mathbb{Q}$.

Например, множество обыкновенных дробей со знаменателем 2 и множество обыкновенных дробей со знаменателем 3 не имеют общих элементов. Но множество A чисел $a \in \mathbb{Q}_0$, записываемых в виде дробей со знаменателем 2, и множество B чисел $b \in \mathbb{Q}_0$, записываемых в виде дробей со знаменателем 3, имеют своим пересечением множество $\mathbb{Z}_0$ целых неотрицательных чисел *).

Вероятно, при первом знакомстве с простейшими дробями вводить термин «дробное число» еще не следует. Но мне кажется, что § 6 пробного учебника для IV класса (под ред. А. И. Маркушевича, М.: Просвещение, 1969), названный «Что такое дробь», только выиграл бы в ясности и доступности, если бы после примеров

$$\frac{8}{8}=1, \quad \frac{24}{8}=3$$

было сказано: таким образом, иногда дробь может служить записью целого числа; но дроби $\frac{7}{8}$ или $\frac{23}{8}$ не являются записями целых чисел, это записи *дробных чисел*. Далее появились бы формулировки: числа, меньшие единицы, записываются правильными дробями, числа, большие единицы или равные единице, записываются неправильными дробями. Речь идет не о каком-либо лишнем теоретизировании, а *о создании* с самого начала привычки пользоваться адекватным языком.

Затруднения возникают лишь с употреблением укоренившегося термина «смешанное число». Термин этот специфически школьный. Его нет в «Энциклопедии элементарной математики» и в известных мне курсах «оснований арифметики» для педагогических институтов. Не пользуются ими и в житейской практике. В школе запись

$$71{,}3$$

называют просто «десятичной дробью», не считая нужным в самом названии оттенить наличие в ней целой части.

Наиболее логичным было бы, рассказав о выделении из числа его целой части, объяснить просто, что в суммах типа

$$2+\frac{2}{3}$$

*) Судя по задаче 1161, авторы пробного учебника для V класса под ред. А. И. Маркушевича (М.: Просвещение, 1969) отнеслись без должного внимания к тому, что обращение к теоретико-множественным понятиям без достаточной подготовки иногда приводит к вредной путанице.

(целое число плюс дробь) принято для краткости опускать знак «+» и писать просто

$$2\frac{2}{3}.$$

При желании иметь специальный термин для такого способа записи чисел можно было бы говорить просто о «смешанной записи» чисел (целая часть + дробная часть).

Представляется приемлемым и термин «смешанная дробь», хотя с ним и связана некоторая филологическая тонкость *). Но, к сожалению, ставшее употребительным выражение «смешанное число» представляется мне с методической точки зрения определенно вредным. Обращаю еще раз внимание на то, что даже в школьных учебниках оно появляется при прохождении соответствующего раздела, а потом бесследно исчезает. Реальной потребности в нем после того, как процедура записи чисел с выделением целой части усвоена, не оказывается.

Мои слушатели, конечно, знают, что каждое неотрицательное рациональное число *единственным образом* записывается в виде несократимой дроби. Этот факт заслуживает внимания и пятиклассников. Я думаю, что уже в V классе вызовет интерес возможность последовательно выписывать все числа $x \in \mathbb{Q}_0$ в порядке возрастания суммы числителя и знаменателя их несократимой записи:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\ldots \\ \frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{2}{1} & \frac{1}{3} & \frac{3}{1} & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{3}{2}\ldots \end{array}$$

Связанные с этой возможностью парадоксы (неотрицательных рациональных чисел «столько же», как и нату-

---

*) *Дробь* в арифметике неотрицательных рациональных чисел есть *выражение* вида $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}_0$, $n \in \mathbb{N}$. *Правильная дробь* и *неправильная дробь* — это частные виды дробей. Но смешанная дробь есть выражение вида $k\frac{m}{n}$, $k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $m < n$, т. е. смешанная дробь не есть дробь. Логически комбинация *слов* «смешанная дробь» есть неразложимый новый термин. В математике, вообще говоря, не боятся такого неестественного с точки зрения языка образования терминов. Например, «упорядоченное множество» не есть частный случай множества, а структура, состоящая из множества и заданного на нем отношения порядка. Но злоупотреблять таким обращением с языком в младших классах нежелательно.

ральных чисел) могут остаться темой кружковых занятий с желающими, но продолжение начатой нами таблицы до довольно далеких пределов является хорошим классным упражнением на сокращение дробей и понятие несократимой дроби. Хорошо, если учащиеся сами найдут и другие способы расположения всех элементов множества $\mathbb{Q}_0$ в последовательности (без повторений) *).

Сам вопрос «что такое рациональное число?» в IV—V классах лучше обойти. Но тем более необходимо стремиться к тому, чтобы состав множества $\mathbb{Q}_0$, а в V классе и множества $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел представлялся учащимся возможно более наглядно.

В следующей далее части этой лекции я напомню, пока безотносительно к возможностям школьного преподавания, знакомое вам из курса педагогических институтов построение теории рациональных чисел как «классов пар целых чисел». Сделаю это применительно к множеству $\mathbb{Q}_0$ неотрицательных рациональных чисел.

1. Рассматриваются пары (m, n), где $m \in \mathbb{Z}_0$, $n \in \mathbb{N}$. Две такие пары (m, n) и (m', n') считаются *эквивалентными*, если

$$mn' = m'n.$$

2. Доказывается, что отношение эквивалентности

$$(m, n) \sim (m', n')$$

рефлексивно, симметрично и транзитивно. По общей теореме о рефлексивных, симметричных и транзитивных от-

*) Можно начать с задач на конечные множества. Существует только одна правильная дробь со знаменателем 1: $\frac{0}{1}$. Несократимая правильная дробь со знаменателем 2 тоже одна: $\frac{1}{2}$. Множество несократимых правильных дробей со знаменателем 3 состоит из двух элементов. Его можно записать, выписывая входящие в него дроби в порядке возрастания или убывания:

$$\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\} = \left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right\}.$$

Можно дать несколько правил последовательного выписывания элементов множества всех несократимых правильных дробей:

$$\left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \ldots\right\} =$$

$$= \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{5}{6}, \ldots\right\}$$

и т. п.

ношениях отсюда делается вывод, что множество всех наших пар разбивается на классы эквивалентности.

3. Класс эквивалентности, к которому принадлежит пара (m, n), обозначается $\frac{m}{n}$. В силу этого определения из эквивалентности

$$(m, n) \sim (m', n')$$

вытекает

$$\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$$

и обратно *). Таким образом, дроби сразу вводятся как обозначения классов пар. Дроби $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{4}$ являются разными обозначениями одного и того же класса пар.

Обратите внимание на этот пункт. Здесь я отступил от некоторых учебников. Этим я избегаю лишних обозначений **) и сокращаю цепь дальнейших определений.

4. Множество всех созданных нами классов эквивалентности и объявляется множеством неотрицательных рациональных чисел $\mathbb{Q}_0$. Каждый из них бесконечным числом способов может быть обозначен дробью.

5. Операции сложения и умножения в множестве $\mathbb{Q}_0$ определяются формулами

5а) $$\frac{m}{n} + \frac{r}{s} = \frac{ms + rn}{ns},$$

5б) $$\frac{m}{n} \times \frac{r}{s} = \frac{mr}{ns}.$$

Так как по форме определения зависят от способа обозначения складываемых и перемножаемых чисел, доказывается *корректность* определений, а именно, устанавливается, что из

$$(m, n) \sim (m', n') \quad \text{и} \quad (r, s) \sim (r', s')$$

вытекает

$$(ms + rn, ns) \sim (m's' + r'n', n's')$$

и

$$(mr, ns) \sim (m'r', n's').$$

---

*) Знак «=» между выражениями у нас всегда указывает на тождество обозначенных выражениями объектов.

**) Например, в «Основаниях арифметики» И. Т. Демидова (М.: Учпедгиз, 1963) $\frac{a}{b}$ считается просто обозначением пары (a, b), а класс пар, эквивалентных паре (a, b), обозначается $K\left(\frac{a}{b}\right)$.

6. Числа (т. е. у нас классы пар), которые могут быть записаны в виде дробей со знаменателем 1, т. е. классы, содержащие элементы вида $(m, 1)$, называются *целыми*. Из определений 5а) и 5б) сразу получаем

$$\frac{m}{1} + \frac{r}{1} = \frac{m+r}{1}, \quad \frac{m}{1} \times \frac{r}{1} = \frac{mr}{1}.$$

Сложение и умножение целых элементов $\mathbb{Q}_0$ вполне аналогично сложению соответствующих элементов m и r исходного множества $\mathbb{Z}_0$. Целые элементы $\mathbb{Q}_0$ можно «идентифицировать» с соответствующими элементами $\mathbb{Z}_0$. К точному логическому смыслу этой «идентификации» я еще вернусь в конце лекции.

При описанном подходе к делу приходится настаивать на том, что правила 5а) и 5б) являются *определениями*. Не имеет смысла ставить вопрос об их *доказательстве*. Это верно, но не менее справедливо и то, что настояние на невозможности доказать эти определения, сопровождаемое лишь ссылкой на доказанную практикой их «целесообразность», не дает окончательного удовлетворения. Мне, как, вероятно, и другим математикам, приходится получать много писем от школьных учителей, выражающих по этому поводу недоумения или предлагающих свои доказательства правил 5а) и 5б). Должен сказать, что в меру своих сил я отвечаю на такие запросы вовсе не обличениями недостаточной грамотности авторов писем, а скорее солидаризируясь с ними в том отношении, что возлагаю главную вину на формализм преподанных им в вузе или в книжках представлений.

Мне представляется, что вся изложенная концепция оправдана только в том случае, если она преподносится вместе с доказательством того, что она вовсе не построена на произволе неведомо почему выбранных определений и даже не на чудесном последующем подтверждении практикой ее целесообразности, а возникает как решение строго поставленной задачи, которая никакого другого решения не имеет.

В применении к построению системы $\mathbb{Q}_0$ неотрицательных рациональных чисел задача может быть поставлена так. Для чисел $x \in \mathbb{Z}_0$ определены сложение и умножение, обладающие свойствами

$$\left.\begin{array}{c} xy = yx, \quad x(yz) = (xy)z, \\ x(y+z) = xy + xz \end{array}\right\} \qquad (*)$$

(перечисляю только нужные для дальнейших выводов). Деление (определенное как действие, обратное умножению) однозначно, но не всегда выполнимо даже при делителе, отличном от нуля.

Предположим, что существует *расширение* $(P, +, \times)$ структуры $(\mathbb{Z}_0, +, \times)$, в котором операции сложения и умножения сохраняют свойства (*), а деление всегда выполнимо, если только делитель отличен от нуля.

В расширенном множестве P для любых a и $b \neq 0$ должен существовать элемент x, для которого

$$bx = a.$$

Обозначим его

$$\frac{a}{b}.$$

В такой обстановке легко доказывается теорема: *для любых a, $b \neq 0$, c и $d \neq 0$ из P*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Доказывается и другая теорема:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

в том и только в том случае, если $ad = bc$.

Рассмотрим множество P_0 тех элементов x, которые представимы в виде

$$x = \frac{m}{n},$$

где $m \in \mathbb{Z}_0$ и $n \in \mathbb{N}$. Ясно, что уже структура $(P_0, +, \times)$ удовлетворяет выдвинутым требованиям. Это *минимальное* расширение структуры $(\mathbb{Z}_0, +, \times)$, в котором эти требования выполнены. Все такие минимальные расширения изоморфны друг другу.

Определения 5а) и 5б) тем не менее были нужны. Ведь все, что мы рассказали о расширениях структуры $(\mathbb{Z}_0, +, \times)$, было построено на гипотезе, что расширения с желательными нам свойствами *существуют*. Чтобы это существование доказать, надо построить хоть одно такое расширение, желательно сразу минимальное. При этом *построении* 5а) и 5б) оказываются уже определениями.

Аналогично положение и в других случаях расширения числовой системы (при введении отрицательных, иррациональных, комплексных чисел). Понимание не только

практической целесообразности, но и логической обоснованности выбора определений при формальном построении соответствующих теорий представляется мне совершенно необходимым элементом воспитания будущих учителей.

Так как студенты педагогических институтов уже знакомы с дробями на школьном уровне, то наиболее желательным порядком при преподавании в педагогическом институте мне представляется такой, при котором все *начинается* с постановки задачи о расширении и доказательства изоморфизма всех минимальных расширений $\mathbb{Z}_0$.

Изложение, следующее намеченным выше этапам 1—5, рассматривается в этом случае как доказательство существования расширений, свойства которых уже известны. Так как дело идет о *расширениях* структуры $(\mathbb{Z}_3, +, \times)$, то уже на этапе 3 можно выделить множество D_0 классов пар (m, n), в которых m не делится нацело на n, и на этапе 4 определить $\mathbb{Q}_0$ как соединение множеств $\mathbb{Z}_0$ и D_0. Дробь $\frac{m}{n}$ при этом считается обозначением целого числа $k = \frac{m}{n}$, если такое существует, а обозначением класса пар, эквивалентных паре (m, n), только в случае, если такого целого нет. Этап 6 оказывается здесь излишним.

На этом варианте изложения я не хочу настаивать, но упоминаю о нем, так как он дает наиболее полную гарантию понимания замысла построения *расширения* заданной структуры, обладающего заданными свойствами. Логически корректна и более формальная процедура: множество классов обозначается $\mathbb{Q}_0'$, а $\mathbb{Q}_0$ получается выкидыванием из $\mathbb{Q}_0'$ части классов и заменой их надлежащими элементами из $\mathbb{Z}_0$. Так поступают в аналогичных задачах расширения в большинстве научных курсов алгебры *).

Вся концепция с формулировкой гипотезы о существовании расширения с заданными свойствами, исследованием следствий из этой гипотезы и построением, доказывающим обоснованность гипотезы, по моему опыту, не только усваивается, но и вызывает непринужденный интерес в IX—X классах специализированной математической школы. В соответствии с историческим ходом развития математики такой гипотетический подход должен ка-

*) Вполне отчетливо проведена идея расширения и доказательства однозначности с точностью до изоморфизма минимальных расширений и в цитировавшихся «Основаниях арифметики» И. Т. Демидова.

заться наиболее естественным и действительно интригующим при введении комплексных чисел. Здесь его можно определенно рекомендовать для массовой школы (по новым программам в курсе «Дополнительных глав математики» в IX классе).

Но в применении к первоначальному изучению дробных чисел в III—V классах концепция расширения первоначального запаса целых неотрицательных чисел с сохранением свойств операций сложения и умножения не только не может быть в явном виде излагаема учащимся, но и не может служить руководящей нитью для учителя или составителя учебников.

В начале лекции уже говорилось, что переход

$$(1) \to (5)$$

от $\mathbb{Z}_0$ к $\mathbb{Q}_0$ более обоснован при следовании реальному историческому пути возникновения дробных чисел из потребностей измерения величин. Об измерении величин говорится довольно много в предназначенных для III—V классов учебниках. При этом до введения отрицательных чисел имеются в виду величины, выражаемые при заданной единице измерения неотрицательными числами. Таковы знакомые школьникам длины отрезков, площади и объемы, веса, впоследствии в курсе физики — массы и т. д. Но само понятие «величина» остается в школьных учебниках почти не разъясненным. Не предрешая вопроса о том, в какой мере это положение может быть изменено в учебниках и непосредственной работе со школьниками, естественно прийти к выводу, что учителя должны были бы иметь ясный ответ на вопрос «что такое величина?» именно в этом элементарном, неявно подразумеваемом в начальном школьном преподавании смысле.

Ответ, естественно, будет дан в терминах математической теории структур.

4. ЧТО ДАЕТ И МОГ БЫ ДАТЬ «КВАНТ» УЧИТЕЛЮ МАТЕМАТИКИ?

Научно-популярному ежемесячному физико-математическому журналу для юношества «Квант» — 15 лет. Можно сказать, что наш журнал как раз достиг возраста... своих читателей. Действительно, как показывают наши анкеты, большинство читателей «Кванта» — старшеклассники. Среди наших подписчиков (их около 200 000) также много учителей, студентов (как правило,

это бывшие читатели — школьники, не захотевшие отказаться от «Кванта» после поступления в вуз), инженеров. Журнал в общую продажу не поступает и распространяется только по подписке, но число его читателей намного превосходит число подписчиков. Дело не только в том, что многие школьные библиотеки выписывают «Квант» — ведь почти все наши читатели-школьники не читают журнал в одиночку, а работают с ним вместе с несколькими товарищами.

В настоящее время менее 10% школьных учителей математики выписывают «Квант». Это, конечно, очень мало: учитель, регулярно использующий «Квант» в своей работе, конечно, пожелает иметь собственный экземпляр журнала. Возможно, что учителей отпугивает уровень некоторых статей и особенно задачника «Кванта». Этот страх мне представляется малоубедительным, так как значительная часть материалов «Кванта» вполне доступна ученикам средних способностей и, во всяком случае, учителям. Если же некоторую часть своего объема журнал выделяет для менее доступного материала, обслуживающего интересы уже сложившихся любителей математики (среди учителей и учеников), то в этом я не вижу ничего дурного, так как выделение из числа учащихся тех, кому целесообразно выбрать после школы деятельность, требующую незаурядного владения математикой, весьма важная задача. В интересах нашей страны — создание такого положения, при котором несколько лучших математиков каждого класса выбирает себе профессию, в которой активное владение математическими методами исследования является существенно необходимым.

Несомненно, стране нужно меньшее количество «чистых» математиков, т. е. исследователей, будущая деятельность которых будет состоять в решении еще не решенных задач математической науки. У меня иногда спрашивают, как я отношусь к научной работе школьников. В применении к математике мой ответ таков.

Обычный возраст для начала самостоятельной работы в математике у молодых одаренных математиков — 19—22 года. Поэтому попытка создать в общеобразовательной школе атмосферу увлечения перспективами самостоятельной работы в математике мне представляется надуманной и никчемной. (Замечу в скобках, что иначе обстоит дело в науках, имеющих дело с большим фактическим материалом. Здесь научные работы школьников могут приобретать коллективный характер. Например, это

может быть участие в геологической экспедиции или археологических раскопках, изучение особенностей течения отдельных рек и т. д.)

Эти скептические замечания отнюдь не означают, что создание на уроках математики, а тем более на математическом кружке, творческой атмосферы невозможно или маловажно. Поэтому в «Кванте» мы особенно ценим статьи, которые непосредственно переходят в серию задач, сначала легких, затем более трудных, а в заключение и просто еще не решенных.

Вообще, научить решать интересные (а потом и трудные) задачи, пожалуй, наша главная цель. Для ее достижения мы публикуем задачи на все лады и вкусы. В разделе «Квант для младших школьников» имеются развлекательные, нетривиальные задачи, доступные пяти-, шести- и семиклассникам. Их формулировки и решения не похожи на обычные школьные задачи. Кстати, эти задачи с удовольствием решают и взрослые читатели, в частности, — это я знаю точно, — некоторые профессора и академики. Недавно мы стали публиковать задачи для 8—10 классов под заголовком «Избранные школьные задачи». Это «школьная математическая классика». В каждом номере дается по 5 задач для каждого из указанных классов; решения приводятся в том же номере.

Для более продвинутых читателей предназначен «Задачник Кванта» и его традиционный конкурс: школьники присылают решения в журнал, мы проверяем их (и возвращаем читателям после проверки), регулярно публикуем списки правильно решивших и ежегодно подводим итоги конкурса. 10—15 лучших (по физике и математике) награждаются и получают право участвовать в республиканском туре соответствующих олимпиад. Наконец, в разделе «Математический кружок» публикуются статьи, основанные на тематических циклах задач, позволяющих школьникам пробовать свои силы в своеобразных микроисследованиях.

Непосредственно учителю могут помочь многие из этих материалов — их можно использовать как в классной, так и во внеклассной работе. «Избранные школьные задачи» можно использовать в классе. На основе статей из раздела «Математический кружок» можно вести занятия школьного кружка или факультатива. Учителю полезно знать варианты вступительных экзаменов в вузы за прошлые годы (мы печатаем их вместе с ответами, указаниями и решениями).

Наконец, с этого (1985) года у нас появилась новая рубрика «Калейдоскоп Кванта». В ней вы найдете портрет, цитату и сведения о выдающемся ученом; доступную всем небольшую статью по математике, занимательные головоломки. Этот материал располагается на центральном развороте журнала; его можно раскрепить и повесить в школьном математическом кабинете.

5. О ВОСПИТАНИИ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ ДИАЛЕКТИКО-МАТЕРИАЛИСТИЧЕСКОГО МИРОВОЗЗРЕНИЯ*)

Я назвал свой доклад «О воспитании на уроках математики и физики диалектико-материалистического мировоззрения». При этом я хочу сделать ударение на более трудной стороне дела: на знакомстве учащихся с элементами диалектического мышления. К обсуждению этой темы обычно относятся с некоторым недоверием, так как часто разговор о диалектике остается очень поверхностным.

Например, ссылаются на то, что, по словам Энгельса, с появлением в математике переменных величин в математику вошли движение и диалектика. Отсюда делают вывод, что раннее введение переменных в современных учебниках является достижением в смысле внедрения диалектики в школьную математику. При этом забывают о том, что переменная в этих учебниках трактуется просто как буква, вместо которой можно поставить наименование любого элемента некоторого множества. Диалектика здесь кроется глубже — за этим формальным определением. Она вполне доступна пониманию учащихся, но требует развернутого исторического подхода к делу. К формальному понятию «переменная» учащиеся должны быть приведены через разбор конкретных примеров, процессов изменения величин. А это сделано в действующем учебнике лишь в небольшой степени.

Наиболее благодарной темой для работы с учащимися является разбор диалектического характера взаимоотношений между конкретными процессами и их математическими моделями. Обратимся в виде примера к дифференциальному уравнению показательного роста или убывания $f'(t)=k\cdot f(t)$, в краткой записи $y'=ky$.

*) Доклад, прочитанный на IV пленуме УМСа (декабрь 1977 г).

В качестве первого примера в учебнике приводится радиоактивный распад вещества: $f(t)$ обозначает количество распадающегося вещества, сохранившегося к моменту времени t. Здесь коэффициент k отрицателен. В виде второго примера с положительным k рассмотрен рост населения страны на 2% в год. Вот этот второй пример и вызывает у многих недоумение или даже резкий протест. Как же, говорят ревнители математической строгости, дифференцировать функцию, принимающую только целые значения! Возмущение сменяется замешательством после напоминания, что в случае радиоактивного распада речь идет также о целом числе атомов, сохранившихся к моменту времени t.

Между тем это хороший повод для того, чтобы подчеркнуть: *математическая модель явления, как правило, это явление схематизирует.* Поэтому она дает правильные предсказания лишь в некоторых пределах (в нашем случае лишь при большой численности населения и для не слишком малых промежутков времени). За этими пределами математическая модель теряет реальный смысл и при ее бездумном применении приводит к ошибочным или бессмысленным результатам.

Общеизвестны ставшие классическими примеры. Ньютоновская механика при обычных земных скоростях объективно правильно отражает реальные явления, но при скоростях, сравнимых со скоростью света, перестает быть применимой — приводит к противоречию с опытом. За пределами годности ньютоновской механики действует уже другая — механика теории относительности Эйнштейна. Но крайне важно этот диалектический процесс перехода от одних моделей, объективно правильных в некоторых пределах, к новым проиллюстрировать и на более простых примерах. Разберу подробно один пример из механики, который я приводил школьникам в летней школе.

В курсе физики для VIII класса правильно говорится, что во многих задачах достаточно маленькое материальное тело можно считать «материальной точкой» — пренебрегать его размерами. Таким является подброшенный вверх мяч, двигающийся по закону $z = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$. Его скорость меняется по закону $v = v_0 - gt$, а ускорение постоянно $a = -g$. Координата z и скорость v меняются непрерывно. В учебнике говорится, что так и должно быть в общем случае движения материальной точки. Действующие на тело силы всегда конечны. Поэтому конечно и ускорение, от-

куда уже вытекает непрерывность зависимости от времени скорости и координаты z. Но на практике мяч, ударившись об пол, сразу меняет направление движения и подпрыгивает вверх. Так как мяч не совершенно упругий, при втором прыжке его начальная скорость будет

$$v_1 = kv_{01}$$

где коэффициент k меньше единицы. Приняв, что коэффициент k постоянен при последовательных прыжках, можно рассчитать весь дальнейший ход процесса. Школьникам было предложено проделать расчеты и нарисовать графики зависимости z, v и a от времени при различных коэффициентах k. С этим заданием они справились самостоятельно, хотя результаты их очень удивили и вызвали много споров.

Оказалось, что последовательные моменты ударов об пол t_n при растущем n сходятся к конечному пределу T: за промежуток времени $[0, T]$ происходит бесконечная последовательность подскоков все уменьшающейся высоты.

Конечно, эта модель идеализирована; для подскоков на высоту того же порядка, что и диаметр мяча, она не применима. Но модель вполне реалистична. Быстрое учащение моментов удара об пол и полная остановка мяча через время T наблюдается достаточно явственно даже просто «на слух». На рис. 101 представлены схематические графики зависимости z и v от времени t.

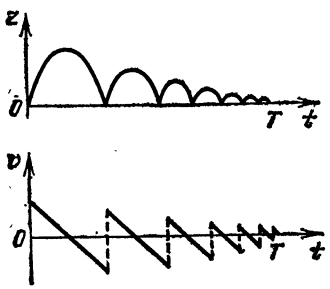


Рис. 101

В момент удара t_n скорость меняется скачком от отрицательного значения $(-v_{n-1})$ к значению $v_n = kv_{n-1}$. Ускорение все время равно $-g$, за исключением моментов удара t_n. В эти моменты мяч получает мгновенные импульсы конечной величины.

Обращение к мгновенным импульсам, сразу меняющим скорость, имеет длительную традицию. Все старые учебники физики содержат трактованные таким образом задачи о столкновении шаров и ударах бильярдных шаров о стенки. При желании говорить об ускорениях в моменты удара, приходится уже обращаться к «дельта-функциям».

После обсуждения мы со школьниками сделали вывод, что, вообще говоря, правильный тезис о конечности сил и вытекающей из нее непрерывной зависимости скорости от времени пришел в противоречие с рассмотрением нашего мяча как материальной точки. Но практически правильным оказался не переход к рассмотрению мяча как конечного деформируемого тела, а введение в модель мгновенных импульсов.

С точки зрения математики задача интересна тем, что дает пример употребления в реальной задаче разрывных функций: для скорости $v(t)$ точки разрыва t_n сгущаются к точке T, где функция $v(t)$ непрерывна. Функция $z(t)$ в точке T оказывается даже дифференцируемой с производной $z'(t)$, равной нулю.

Последние замечания интересны уже только для математика. Здесь мы исследуем построенную модель за пределами ее применимости. Это, однако, типично для подхода чистого математика.

Для беседы о различии подходов математика и физика можно обратиться к числу π — отношению длины окружности к ее диаметру. В младших классах мы, по существу, следуем подходу к делу физика. Измеряя диаметр блюдца и его периметр, после деления получаем приблизительно $\pi \approx 3{,}14$. Современная наука и техника требуют знания этого отношения с много большей точностью.

Но на уроках математики учащиеся знакомятся с приемами вычисления π с любой точностью. Им рассказывают, что математики при помощи вычислительных машин нашли 2000 десятичных знаков числа π. Здесь уместно спросить учащихся, *какой реальный смысл они связывают с этими достижениями математиков*. Являются ли они надежным предсказанием результата каких-то будущих реальных измерений? Это элементарный подход к проблематике, которая возникает перед учащимися при обсуждении смысла неевклидовых геометрий в математике и вопроса о геометрии вселенной в целом.

Суть различия между подходами к делу математика и физика популярно можно объяснить так. И тот и другой, отправляясь от некоторого запаса наблюдений, создают схематические модели реальных явлений. Математик, взявшись за изучение такой модели, изучает последовательно все следствия из положенных в основу модели допущений, хотя бы они далеко выходили за рамки исходных наблюдательных данных. Физик проверяет соответствие модели новым наблюдениям и при обнаружении

расхождений переключается на создание более гибкой модели, содержащей первоначальную лишь в качестве первого приближения. Раскрыть все пути плодотворного сотрудничества математиков и физиков и является увлекательной задачей межпредметных связей. Когда-то мне случалось преподавать в одном и том же классе математику и физику. Но я при этом любил подчеркнуто делать различие, говоря, что сейчас я буду рассуждать как математик, а в другой раз выступать как убежденный физик.

Общеизвестно, что воспитание научного материалистического мировоззрения невозможно без ознакомления учащихся с историей науки и понимания учащимися основных этапов развития науки. Именно из этих соображений в новую программу по математике введено понятие о простейших дифференциальных уравнениях. Изучаются детально лишь три уравнения: равномерно ускоренного движения $y' = a$, гармонических колебаний $y'' = -k^2y$ и показательного роста или убывания $y' = ky$.

Напомню, что для Ньютона существовали две основные задачи анализа: (1) *нахождение по функциям их производных*, (2) *нахождение по соотношениям между функциями и их производными самих этих функций*. Вторая задача и есть задача интегрирования дифференциальных уравнений. Задачу нахождения первообразных Ньютон рассматривал как простой частный случай.

С понятием дифференциального уравнения неразрывно связана вся идеология математического естествознания от Ньютона до Лапласа. Общий принцип детерминизма Лаплас излагал исходя из того, что основные законы природы выражаются в форме дифференциальных уравнений, а их интегрирование позволяет по-настоящему предсказывать будущее. Очень хотелось бы, чтобы в школе не оставался обойденным классический пример планетных движений. Интегрирование соответствующих дифференциальных уравнений, как известно, представляет собой грандиозную задачу, решаемую лишь численными методами. Но ясное представление о задаче дать нетрудно. Без достаточно конкретного понимания этого этапа развития математического естествознания невозможно и понимание дальнейших этапов, появления статистической физики, квантовой физики.

В силу сказанного очень важно, чтобы тема «Дифференциальные уравнения» звучала достаточно сильно как в школьном курсе математики, так и в школьной физике

независимо от того, что элементарные задачи могут быть разобраны более экономным кустарным способом.

Со времени Платона существование чистой математики с ее абсолютно достоверными выводами, выходящими за пределы эмпирической проверки, которая всегда лишь приближенна, использовалось как аргумент в пользу идеализма. Мы обязаны показать вполне конкретное, материальное происхождение математических предложений. В частности, не следовать за старыми учебниками, выдававшими аксиомы геометрии за «истины, не требующие доказательства в силу своей очевидности».

При переработке учебников геометрии мы решили в VI и VII классах говорить об аксиомах лишь в историческом плане. Лишь в VIII классе обсуждается задача выделения небольшого числа предложений, достаточных для вывода всех остальных, т. е. о выборе системы аксиом. Как известно, вне такой постановки вопроса подчеркивание различия между «аксиомами» и «теоремами» лишено ясного смысла.

Очень важным нам представляется полное удовлетворение запросов учащихся, проявляющих повышенный интерес к математике. Факультативные занятия и специализированные классы должны стать доступными всем, кто имеет серьезное намерение в них заниматься.

Наряду с отдельно издаваемыми пособиями для факультативных занятий мне представляется вполне оправданным издание для IX—X классов расширенных учебников, охватывающих весь материал основных учебников в органическом соединении с дополнительным материалом.

Дополнительное замечание в прениях. По поводу моего доклада я хочу ответить И. К. Кикоину. Слово «модель» получило такое широкое распространение в популярной литературе, что нам не следует оберегать учащихся от его разумного употребления. Надо лишь подчеркивать, что, создавая схематизированные модели действительности, мы получаем вполне реальное знание о самой действительности. Лишь за пределами своей применимости модель теряет реальное значение и должна быть заменена новой, более совершенной.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ КОММЕНТАРИЙ

РАЗДЕЛ I. РАЗМЫШЛЕНИЯ МАТЕМАТИКА

1. *Как я стал математиком.*— Опубликовано под этим названием в журнале «Огонек» (1963, № 48, с. 12—13) и в брошюре «Наука в твоей профессии» (М.: Знание, 1978, с. 5—7) под названием «Как я стал математиком. Что такое математика».

2. *Научный руководитель.*— Статья А. Н. Колмогорова опубликована в книге Л. Нейман «Радость открытия» (М.: Детская литература, 1972, с. 160—164). Книга Л. Нейман посвящена жизни и творчеству выдающегося советского математика-тополога П. С. Урысона (1898—1924). В первой части Лина Нейман (сестра П. С. Урысона) рассказывает о детских, юношеских и зрелых годах математика. Во второй части книги приводятся воспоминания близко знавших П. С. Урысона математиков.

3. *Два интервью.*— Статья «Беседа с А. Н. Колмогоровым» опубликована в журнале «Квант» (1983, № 4, с. 12—13) (беседу вел А. Б. Сосинский). Интервью «Ученик об учителе» опубликовано в журнале «Успехи математических наук» (УМН) (1985, т. 40, вып. 3(243), с. 7—8) (интервью взял В. А. Успенский); эта статья в УМН перепечатана из газеты Кемеровского университета «Путь в науку» (1983, 7 сентября, № 29 (796)).

4. *О профессии математика.*— Текст брошюры «О профессии математика» дается по третьему изданию (М.: Изд-во МГУ, 1959). В этой брошюре, кроме приводимого в настоящей книге текста, имеются еще четыре справочных приложения (о механико-математическом факультете МГУ 50-х годов; задачи письменного вступительного экзамена на мех.-мат. ф-т МГУ в 1958 г.; задачи математических олимпиад 50-х годов; список литературы по математике), которые по понятным причинам здесь опущены. Что касается пункта «Современная машинная математика и кибернетика», в котором речь идет об ЭВМ 50-х годов, отметим, что, несмотря на то, что многие факты, изложенные в статье, устарели, этот материал чрезвычайно интересен с точки зрения истории развития вычислительной математики и техники. В 1973 г. сокращенный вариант статьи был опубликован в журнале «Квант» (№ 4, с. 12—18).

5. *Геометрия на сфере и геология.*— Опубликовано в журнале «Наука и жизнь» (1966, № 2, с. 32).

6. *Автоматы и жизнь.*— Статья А. Н. Колмогорова с таким названием была впервые опубликована в двух номерах журнала «Техника—молодежи» за 1961 год (№ 10, с. 16—19 и № 11, с. 30—33). Позднее она была дословно перепечатана под тем же названием в сборнике статей «Кибернетика ожидаемая и кибернетика неожиданная» (М.: Наука, 1968, с. 12—31). А. Н. Колмогоров прочел доклад «Автоматы и жизнь» 5 апреля 1961 г. на методологическом семинаре мех.-мат. ф-та МГУ (см. [194]).

7. *Избранные предисловия.*— В этот пункт попали предисловия А. Н. Колмогорова, обращенные к школьникам и имеющие общезначимый характер; некоторые фразы в этих предисловиях носят технический характер и поэтому заменены многоточием в квадратных скобках [...]. Укажем годы изданий книг и статьи, к которым написаны эти предисловия:

Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп.— М.: Наука, 1981.

Васильев Н. Б., Егоров А. А. Сборник подготовительных задач к Всероссийской олимпиаде юных математиков.— М.: Учпедгиз, 1963.

Гальперин Г. А., Толпыго А. К. Московские математические олимпиады.— М.: Просвещение, 1986.

Болтянский В. Г., Розов Н. Х. Ленинская теория познания и математические понятия // Квант, 1970, № 7, с. 2—9.

РАЗДЕЛ II. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

1, 2. *Что такое функция? Что такое график функции?* — Статьи опубликованы в двух номерах журнала «Квант» за 1970 г. (№ 1, с. 27 — 36; № 2, с. 3—13). Несколько позже (и в несколько измененном виде) они были объединены А. Н. Колмогоровым под названием «Что такое функция и ее график», став гл. 1 книги «Летняя школа на Рубском озере» (М.: Просвещение, 1972).

3. *Функции двух и многих переменных. Зависимости между переменными и их графики.*— Такое название получила гл. 2 указанной выше книги «Летняя школа на Рубском озере». Отметим, что гл. 3 этой книги «Решение уравнений с помощью номограмм» составлена по материалам прочитанных в летней школе лекций А. Н. Колмогорова (в книге приведена фотография Андрея Николаевича, читающего одну из этих лекций). Эта глава написана С. В. Смирновым, и в настоящем сборнике она не приводится.

4. *Группы преобразований.*— Статья, опубликованная в журнале «Квант» в 1976 г. (№ 10, с. 2—5), предваряет статью Л. Садовского и М. Аршинова «Группы» в том же номере (с. 6—12).

5, 6, 7.— Тексты этих пунктов настоящего сборника взяты из книги «Курс математики для физико-математических школ» (Выпуск 1, М.: Изд-во МГУ, 1971). Пункт 5 сборника носит в «Курсе...» название «Введение». Пункт 6 составлен из двух текстов «Курса...» — из § 1 раздела «Геометрия» и § 2 раздела «Введение в анализ». Пункт 7 приводится в «Курсе...» в качестве «Приложения».

РАЗДЕЛ III. ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ

1. *Введение в теорию вероятностей и комбинаторику.*— Опубликовано в журнале «Математика в школе» (1968, № 2, с. 63—72). Эта статья приведена в настоящей книге с некоторыми сокращениями: отсутствуют несколько вводных и заключительных абзацев, носящих методический характер и относящихся к идущей вслед за этой статьей А. Н. Колмогорова статье Б. В. Гнеденко и И. Г. Журбенко «Теория вероятностей и комбинаторика» (с. 72—84).

2. *Полулогарифмическая и логарифмическая сетки.*— Опубликовано в журнале «Квант» (1973, № 3, с. 2—7).

3. *Величина и ее измерение.*— Текст составлен из двух статей в Большой Советской Энциклопедии (БСЭ): «Величина» (БСЭ, 1971, т. 4, с. 456—457) и «Измерение» (БСЭ, 1972, т. 10, с. 220—221).

4. *Алгоритм Евклида.*— Опубликовано в БСЭ (т. 2, 1950, с. 65—67).

5. *О решении 10-й проблемы Гильберта.*— Опубликовано в журнале «Квант» (1970, № 7, с. 39—44) совместно с Ф. Л. Варпаховским.

6. *К обоснованию теории вещественных чисел.*— Статья опубликована во 2-м томе альманаха «Математическое просвещение» (1957, с. 169—173). Несмотря на краткое изложение (а может быть, благодаря ему), она для своего прочтения требует хорошей математической культуры и рассчитана на сильного школьника (и даже студента).

7. *Избранные задачи.*— «*Задача о периодических последовательностях*» публикуется впервые в настоящей книге. Задача была сообщена в частной беседе А. Н. Колмогоровым составителю настоящей книги. Задача вполне доступна ученикам 7—9 классов.

«*Решето Эратосфена*» — заметка, опубликованная в «Кванте» (1974, № 1, с. 77) в разделе «Квант для младших школьников». Поставленные в заметке задачи доступны семикласснику.

«*Паркеты из правильных многоугольников*» — задача-заметка, опубликованная в «Кванте» (1970, № 3, с. 24—27); рассчитана в основном на старшеклассников. Позже в несколько ином виде заметка опубликована в «Энциклопедическом словаре юного математика» (М.: Педагогика, 1985, с. 200—201).

«*Раскраска плоских решеток*» — такое название составитель настоящей книги дал задаче А. Н. Колмогорова, имеющей номер М3 в «Кванте», (1970, § 1, с. 52—53). Решение этой трудной задачи опубликовано в двух номерах журнала «Квант» за 1970 г. (№ 7, с. 54—55, и № 8, с. 42—46).

«*Задача о переключателях*» приведена в статье В. Г. Болтянского и И. М. Яглома «Школьный математический кружок при МГУ и Московские математические олимпиады», опубликованной в книге «Сборник задач Московских математических олимпиад» (составитель А. А. Леман) (М.: Просвещение, 1965, с. 12). Эту задачу Андрей Николаевич предложил школьникам на своей лекции «Арифметика вычетов и алгебры Буля». Название задаче дал составитель настоящей книги.

«*Задача о вложенных треугольниках и вложенных тетраэдрах*» ставилась А. Н. Колмогоровым в 50-х годах перед студентами механико-математического факультета МГУ и была решена В. А. Боровиковым (О пересечении последовательности симплексов, УМН, 1952, т. 7, вып. 6, с. 179—180). По условию и найденному решению задача вполне доступна десятикласснику. В. А. Боровиков решил эту задачу для n-мерного пространства.

«*Проверка цилиндрических деталей*». Эту задачу, без требования выпуклости фигуры, Андрей Николаевич предложил в 1956 г. на школьном математическом кружке. Формулировка условия была записана А. П. Савиным и опубликована в журнале «Квант» (1971, № 3, с. 20). В настоящей книге она приведена с некоторыми стилистическими изменениями. Через 10 лет задача в такой постановке (без требования выпуклости) была решена А. Бабичевым и опубликована им в статье «Об одной задаче Колмогорова» (Квант, 1981,

№ 5, с. 14—16). Именно, А. Бабичевым был придуман пример *невыпуклой* фигуры, обладающей нужным свойством. Андрей Николаевич, узнав ответ на свой вопрос, поставил тот же вопрос для выпуклых фигур; мы привели его в конце задачи. Поставленная проблема до сих пор не решена.

РАЗДЕЛ IV. ЛЕКЦИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ

1, 2, 3.— Эти пункты в настоящей книге составляют три лекции А. Н. Колмогорова, опубликованные им в трех номерах «Математики в школе» (1969, № 3, с. 12—17; 1969, № 5, с. 8—17 и 1970, № 2, с. 27—32) и объединенные им под общим заголовком «Научные основы школьного курса математики». Первая лекция в журнале «Математика в школе» снабжена следующей аннотацией.

Десять лекций под этим названием («Научные основы школьного курса математики».— Примеч. сост.) *были прочитаны мною в Центральном лектории общества «Знание» в* 1968-69 *учебном году. Естественно, что эти лекции не могут заменить более подробного изложения, пригодного, например, в качестве руководства для педагогических институтов. Я решаюсь на публикацию этих лекций в «Математике в школе» лишь потому, что потребность в более современном освещении научных основ перестройки школьного курса математики очень настоятельна.*

Вот программа дальнейших лекций: Натуральные числа. Скалярные величины и действительные числа. Векторные пространства. Вращения и тригонометрические функции. Общее понятие о функции в школе. Язык математических знаков и начала математической логики в школе. Понятие структуры в современной математике и обзор основных структур школьной математики. Логическое строение школьного курса геометрии.

Примечание составителя. Несмотря на то, что остальных лекций, кроме первых трех, А. Н. Колмогоровым в «Математике в школе» опубликовано не было, мы считаем, что материалы настоящей книги некоторым образом восполняют этот пробел.

4. *Что дает и мог бы дать «Квант» учителю математики?*— Статья опубликована 22 января 1985 г. в «Учительской газете» (№ 10 (8479)).

5. *О воспитании на уроках математики и физики диалектико-материалистического мировоззрения.*— Текст доклада, прочитанного А. Н. Колмогоровым на IV пленуме УМСа (Ученого методического совета Министерства просвещения СССР) в декабре 1977 г., был опубликован в «Математике в школе» (1978, № 3, с. 6—9). Позже в сокращенном виде текст был опубликован в журнале «Квант» (1980, № 4, с. 15—18) под названием «Диалектико-материалистическое мировоззрение в школьных курсах математики и физики».

СПИСОК НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫХ ТРУДОВ А. Н. КОЛМОГОРОВА

(в том числе работ по школьной тематике)

Статьи в журнале «Квант»

1. Что такое функция? — 1970.— № 1.— С. 27—36.
2. Задача М3.— 1970.— № 1.— С. 52—53.
3. Что такое график функции? — 1970.— № 2.— С. 3—13.
4. Паркеты из правильных многоугольников.— 1970.— № 3. С. 24—27.
5. О решении 10-й проблемы Гильберта.— 1970.— № 7.— С. 39—44.— Совм. с Ф. Л. Варпаховским.
6. Предисловие к статье: Болтянский В. Г., Розов Н.Х. Ленинская теория познания и математические понятия.— 1970.— № 7.— С. 2.
7. Полулогарифмическая и логарифмическая сетка.— 1973.— № 4.— С. 2.
8. О профессии математика.— 1973.— № 4.— С. 12—18.
9. Решето Эратосфена.— 1974.— № 1.— С. 77.
10. Группы преобразований.— 1976.— № 10.— С. 2—5.
11. Физико-математическая школа при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова.— 1977.— № 1.— С. 56—57. Совм. с В. В. Вавиловым.
12. ФМШ при МГУ — 15 лет.— 1979.— № 1.— С. 55—57. Совм. с В. В. Вавиловым и И. Т. Тропиным.
13. Диалектико-материалистическое мировоззрение в школьных курсах математики и физики.— 1980.— № 4.— С. 15—18.

Статьи в журнале «Математика в школе»

14. Свойства неравенств и понятие о приближенных вычислениях.— 1941.— № 2.— С. 1—12. Совм. с П. С. Александровым.
15. Иррациональные числа.— 1941.— № 3.— С. 1—13. Совм. с П. С. Александровым.
16. Объем знаний по математике для восьмилетней школы (Комиссия по математическому образованию математического отделения АН СССР)— 1965, № 2.— С. 21—24.
17. Геометрические преобразования в школьном курсе геометрии.— 1965.— № 2.— С. 24—29.
18. О содержании школьного курса математики.— 1965.— № 4.— С. 53—62. Совм. с И. М. Ягломом.
19. Функции, графики, непрерывные функции.— 1965.— № 6.— С. 12—21.
20. О школьном определении тождества.— 1966.— № 2.— С. 33—35.
21. Об учебниках на 1966/67 уч. год. —1966.— № 3.— С. 26—30.
22. Введение к статье С. Б. Суворовой.— 1966.— № 4.— С. 29—30.

23. Об учебниках на 1966/67 уч. год.— 1966.— № 6.— С. 31—37.
24. Об учебниках на 1966/67 уч. год.— 1967.— № 1.— С. 43—48.
25. Новые программы и некоторые основные вопросы усовершенствования курса математики в средней школе.— 1967.— № 2.— С. 4—13.
26. К изменениям в тексте учебника алгебры для VI—VIII классов А. Н. Барсукова.— 1967.— № 6.— С. 22—24.
27. Обобщение понятия степени и показательная функция.— 1968.— № 1.— С. 24—32.
28. К изучению показательной функции и логарифмов в восьмилетней школе.— 1968.— № 2.— С. 23—25.
29. К новым программам по математике.— 1968.— № 2.— С. 21—22.
30. Введение в теорию вероятностей и комбинаторику.— 1968.— № 2.— С. 63—72.
31. Письмо в редакцию.— 1969.— № 2.— С. 93.
32. Научные основы школьного курса математики. Первая лекция. Современные взгляды на природу математики.— 1969.— № 3.— С. 12—17.
33. Научные основы школьного курса математики. Вторая лекция. Натуральные числа.— 1969.— № 5.— С. 8—17.
34. Научные основы школьного курса математики. Третья лекция. Обобщение понятия числа. Неотрицательные рациональные числа.— 1970.— № 2.— С. 27—32.
35. О пробном учебнике геометрии для VI класса.— 1970.— № 4.— С. 21. Совм. с А. Ф. Семеновичем.
36. Учебные материалы по геометрии для V класса.— 1970.— № 5.— С. 30—45. Совм. с А. Ф. Семеновичем и Р. С. Черкасовым.
37. Современная математика и математика в современной школе.— 1971.— № 6.— С. 2—3.
38. О системе основных понятий и обозначений школьного курса математики.— 1971.— № 2.— С. 17—22.
39. Геометрические построения.— 1971.— № 6.— С. 13—21. Совм. с А. Ф. Семеновичем и Р. С. Черкасовым.
40. Реферат доклада «Элементы логики в современной школьной математике».— 1971.— № 3.— С. 91.
41. Из нового пособия по геометрии для VI класса.— 1972.— № 1. С. 22.
42. Б. В. Гнеденко.— 1972.— № 1.— С. 85. Совм. с Р. С. Черкасовым.
43. По поводу письма Н. Я. Виленкина.— 1972.— № 6.— С. 34.
44. К методике изучения темы «Параллельный перенос» в курсе геометрии VI класса.— 1973.— № 1.— С. 24—29. Совм. с А. Ф. Семеновичем и Р. С. Черкасовым.
45. О структуре нового учебника по геометрии для VII класса.— 1973.— № 2.— С. 17. Совм. с А. Ф. Семеновичем и Р. С. Черкасовым.
46. Методические замечания к пробному учебнику алгебры и началам анализа для IX класса.— 1973.— С. 64—65. Совм. с Б. Е. Вейцем и С. С. Демидовым.
47. И. Г. Петровский.— 1973.— № 4.— С. 81. Совм. с П. С. Александровым и О. А. Олейник.
48. Школа-интернат при университете. Для чего она? — 1974.— № 2.— С. 58—60.

49. Метод математической индукции.— 1975.— № 1.— С. 8. Совм. с С. И. Шварцбурдом.
50. Элементы комбинаторики.— 1975.— № 2.— С. 16—25.
51. Действительные числа. Бесконечные последовательности и их пределы.— 1975.— № 2.— С. 25. Совм. с О. С. Ивашевым-Мусатовым.
52. Тригонометрические функции, их графики и производные в учебном пособии для X класса.— 1976.— № 1.— С. 10—25. Совм. с С. И. Шварцбурдом.
53. XXXVIII Московская математическая олимпиада (февраль — март 1975 г.).— 1976.— № 4.— С. 68—72. Совм. с Г. А. Гальпериным.
54. Интеграл в учебном пособии для X класса.— 1976.— № 6.— С. 15—17.
55. Что такое функция.— 1978.— № 2.— С. 27.
56. О воспитании на уроках математики и физики диалектико-материалистического мировоззрения.— 1978.— № 3.— С. 6—9.
57. С. Л. Соболев.— 1978.— № 6.— С. 67. Совм. с О. А. Олейник.
58. Новые программы французской средней школы.— 1978.— № 6.— С. 74. Совм. с А. М. Абрамовым.
59. Об учебном пособии «Геометрия 6—8».— 1979.— № 3.— С. 38. Совм. с А. Ф. Семеновичем, Р. С. Черкасовым.
60. А. И. Маркушевич.— 1979.— № 5.— С. 77.
61. Об учебном пособии «Алгебра и начала анализа 9—10».— 1980.— № 4.— С. 18.
62. К вопросу о проведении первых уроков по теме «Векторы».— 1981.— № 3.— С. 8. Совм. с А. М. Абрамовым.
63. О понятии вектора в курсе средней школы.— 1981.— № 3.— С. 7—8.
64. Рецензия на книгу Л. С. Понтрягина «Анализ бесконечно малых».— 1981.— № 5.— С. 7.
65. Б. В. Гнеденко.— 1982.— №1. — С. 72.
66. Л. В. Канторович.— 1982.— № 2.— С. 77. Совм. с В. А. Залгаллером.
67. О понятии предела в общеобразовательной школе.— 1982.— № 5.— С. 56.
68. Ньютон и современное математическое мышление.— 1982.— № 6.— С. 58—64.
69. П. С. Александров.— 1983.— № 1.— С. 47.
70. Об учебном пособии «Геометрия 6—10» А. В. Погорелова.— 1983.— № 2.— С. 45.
71. Замечания о понятии множества в школьном курсе математики.— 1984.— № 1.— С. 52.
72. С. Л. Соболев и современная математика.— 1984.— № 1.— С. 73. Совм. с О. А. Олейник.
73. О скалярных величинах.— 1986.— № 3.— С. 32—33.

Статьи в Большой Советской Энциклопедии (БСЭ)

БСЭ, 1-е издание

74. Уравнение.— 1936.— Т. 56.— С. 163—165.
75. Континуум.— 1937.— Т. 34.— С. 139—140.
76. Марков Андрей Андреевич.— 1938.— Т. 38.— С. 152—153.

77. Математика.— 1938.— Т. 38.— С. 359—402.
78. Математическая индукция.— 1938.— Т. 38.— С. 405—406.
79. Мера.— 1938.— Т. 38.— С. 831—832.
80. Многомерное пространство.— 1938.— Т. 39.— С. 577—578.
81. Ориентация.— 1939.— Т. 43.— С. 342—344.
82. Поверхность.— 1940.— Т. 45.— С. 746—748.
83. Развитие математики в СССР.— 1947, том «СССР».— С. 1318—1323.
84. Средние величины.— 1947.— Т. 52.— С. 508—509.

БСЭ, 2-е издание

85. Абсолютная величина.— 1949.— Т. 1.— С. 32.
86. Адамар Жак.— 1949.— Т. 1.— С. 388.
87. Аддитивные величины.— 1949.— Т. 1.— С. 394.
88. Аксиома.— 1949.— Т. 1.— С. 613—616.
89. Аксонометрия.— 1949.— Т. 1.— С. 617.
90. Алгебра в средней школе.— 1950.— Т. 2.— С. 61—62.
91. Алгебраическое выражение.— 1950.— Т. 2.— С. 64.
92. Алгоритм.— 1950.— Т. 2.— С. 65.
93. Алгоритм Евклида.— 1950.— Т. 2.— С. 65—67.
94. Александров Александр Данилович.— 1950.— Т. 2.— С. 83.
95. Александров Павел Сергеевич.— 1950.— Т. 2.— С. 84.
96. Асимптота.— 1950.— Т. 3.— С. 238—239.
97. Асимптотические выражения.— 1950.— т. 3.— С. 239.
98. Ахиезер Наум Ильич.— 1950.— Т. 3.— С. 565.
99. Банах Стефан.— 1950.— Т. 4.— С. 245.
100. Бари Нина Карловна.— 1950.— Т. 4.— С. 245.
101. Бернштейн Сергей Натанович.— 1950.— Т. 5.— С. 52.
102. Бесконечно большие.— 1950.— Т. 5.— С. 66—67.
103. Бесконечно малые.— 1950.— Т. 5.— С. 67—71. Совм. с В. Ф. Каганом.
104. Бесконечно удаленные элементы.— 1950.— Т. 5. — С.71—72. Совм. с Б. Н. Делоне.
105. Бесконечность (в математике).— 1950.— Т. 5.— С. 73—74.
106. Бигармонические функции.— 1950.— Т. 5.— С. 159.
107. Билинейная форма.— 1950.— Т. 5.— С. 167.
108. Больших чисел закон.— 1950.— Т. 5.— С. 538 — 540.
109. Брауэр Лёйтзен Эгберт Ян.— 1951.— Т. 6.— С. 62. Совм. с С. А. Яновской.
110. Вариационный ряд.— 1951.— Т. 6.— С. 641.
111. Вейль Герман.— 1951.— Т. 7.— С. 106. Совм. с С. А. Яновской.
112. Величина.— 1951.— Т. 7.— С. 340—341.
113. Вероятное отклонение.— 1951.— Т. 7.— С. 507.
114. Вероятность.— 1951.— Т. 7.— С. 508—510.
115. Выборочный метод.— 1951.— Т. 9.— С. 417—418. Совм. с Т. И. Козловым.
116. Гаусса распределение.— 1952.— Т. 10.— С. 275.
117. Геодезическая кривизна.— 1952.— Т. 10.— С. 481.
118. Гильберт Давид.— 1952.— Т. 11.— С. 370—371.
119. Гистограмма.— 1952.— Т. 11.— С. 447.
120. Гнеденко Борис Владимирович.— 1952.— Т. 11.— С. 545.
121. Гомеоморфизм.— 1952.— Т. 12.— С. 21.
122. Гомотопия.— 1952.— Т. 12.— С. 35.

123. Движение (в геометрии).— 1952.— Т. 13.— С. 447.
124. Двучлен.— 1952.— Т. 13.— С. 518.
125. Действительные числа.— 1952.— Т. 13.— С. 570.
126. Деление.— 1952.— Т. 13.— С. 628.
127. Дискретность.— 1952.— Т. 14.— С. 425.
128. Дисперсия.— 1952.— Т. 14.— С. 438.
129. Дистрибутивность.— 1952.— Т. 14.— С. 479.
130. Дистрибутивный оператор.— 1952.— Т. 14.— С. 479.
131. Дифференциал.— 1952.— Т. 14.— С. 498—499.
132. Дифференциальные уравнения.— 1952.— Т. 14.— С. 520—526. Совм. с Б. П. Демидовичем и В. В. Немыцким.
133. Доверительная вероятность.— 1952.— Т. 14.— С. 616.
134. Доверительные границы.— 1952.— Т. 14.— С. 617.
135. Знаки математические.— 1952.— Т. 17.— С. 115—119. Совм. с И. Г. Башмаковой и А. П. Юшкевичем.
136. Значащие цифры.— 1952.— Т. 17.— С. 135.
137. Изоморфизм.— 1952.— Т. 17.— С. 478—479. Совм. с В. И. Битюцковым.
138. Изотропные прямые.— 1952.— Т. 17.— С. 509.
139. Именованное число.— 1952.— Т. 17.— С. 557.
140. Имшенецкий Василий Григорьевич.— 1952.— Т. 17.— С. 607.
141. Индукция математическая.— 1953.— Т. 18.— С. 146.
142. Интеграл.— 1953.— Т. 18.— С. 250—253. Совм. с В. И. Гливенко.
143. Интеграл вероятности.— 1953.— Т. 18.— С. 253.
144. Интерполяция.— 1953.— Т. 18.— С. 304—305.
145. Интуиционизм.— 1953.— Т. 18.— С. 319.
146. Исключение неизвестных.— 1953.— Т. 18.— С. 483.
147. Испытание.— 1953.— Т. 18.— С. 604.
148. Исчерпывания метод.— 1953.— Т. 19.— С. 50—51.
149. Квадрант.— 1953.— Т. 20.— С. 434.
150. Компакт.— 1953.— Т. 22.— С. 282.
151. Константа.— 1953.— Т. 22.— С. 416.
152. Континуум.— 1953.— Т. 22.— С. 454—455.
153. Координаты.— 1953.— Т. 22.— С. 524—525.
154. Корреляция.— 1953.— Т. 23.— С. 55—58.
155. Линия.— 1954.— Т. 25.— С. 167—170.
156. Малых чисел закон.— 1954.— Т. 26.— С. 168.
157. Марков Андрей Андреевич.— 1954.— Т. 26.— С. 294.
158. Математика.— 1954.— Т. 26.— С. 464—483.
159. Математическая статистика.— 1954.— Т. 26.— С. 485—490.
160. Математическая физика.— 1954.— Т. 26.— С. 490.
161. Мизес Рихард.— 1954.— Т. 27.— С. 414.
162. Многомерное пространство.— 1954.— Т. 27.— С. 660.
163. Множеств теория.— 1954.— Т. 28.— С. 14—17. Совм. с П. С. Александровым.
164. Ориентация.— 1955.— Т. 31.— С. 188—189.
165. Основания геометрии.— 1955.— Т. 31.— С. 296.
166. Поверхность.— 1955.— Т. 33.— С. 346—347. Совм. с Л. А. Скорняковым.
167. Порядковые числа.— 1955.— Т. 34.— С. 238.
168. Слуцкий Евгений Евгеньевич.— 1956.— Т. 39.— С. 378.
169. Смирнов Николай Васильевич.— 1956.— Т. 39.— С. 406.
170. Достаточная статистика.— 1958.— Т. 51.— С. 106.
171. Информация.— 1958.— Т. 51.— С. 129—130.
172. Кибернетика.— 1958.— Т. 51.— С. 149—151.

БСЭ, 3-е издание

173. Величина.— 1971.— Т. 4.— С. 456—457.
174. Винер Норберт.— 1971.— Т. 5.— С. 72.
175. Гильберт Давид.— 1971.— Т. 6.— С. 519.
176. Измерение.— 1972.— Т. 10.— С. 220—221.
177. Интеграл. —1972.— Т. 10.— С. 300—302.
178. Исчерпывания метод. — 1972.— Т. 10.— С. 586.
179. Приемочный статистический контроль.— 1975.— Т. 20.— С. 572—573. Совм. с Ю. К. Беляевым.

Статьи в Математической Энциклопедии

180. Бесконечность.— 1977.— Т. 1.— С. 455—458.
181. Величина.— 1977.— Т. 1.— С. 651—653.
182. Вероятность.— 1977.— Т. 1.— С. 667—669.
183. Математика.— 1982.— Т. 3.— С. 560—564.
184. Математическая статистика.— 1982.— Т. 3.— С. 576—581. Совм. с Ю. В. Проховым.

Другие научно-популярные статьи

185. Современная математика.— Фронт науки и техники, 1934, № 5/6.— С. 25—28, а также в кн.: Сборник статей по философии математики.— М.: ОНТИ, 1936.— С. 7—13.
186. Теория и практика в математике.— Фронт науки и техники.— 1936.— № 5.— С. 39—42.
187. Ред. и предисл. к книге: Л е б е г А. Об измерении величин / Пер. с франц.— М.: Учпедгиз, 1938—208 с.
188. Николай Иванович Лобачевский. 1793—1843 г.; Л.: Гостехиздат, 1943.— 100 с. Совм. с П. С. Александровым.
189. Великий русский ученый-новатор: К 150-летию со дня рождения Н. И. Лобачевского.— Известия, 1943, 2 сентября.
190. К обоснованию теории вещественных чисел.— УМН.— 1946.— Т. 1. вып. 1.— С. 217—219; а также: Математическое просвещение.— 1957.— Т. 2.— С. 169—173.
191. Ньютон и современное математическое мышление // Московский университет — памяти Исаака Ньютона, 1643—1943.— М.: Изд-во МГУ, 1946.— С. 27—43.
192. О профессии математика.— 3-е изд.— М.: Изд-во МГУ, 1959/60.— 60 с.; 1-е изд.— М.: Сов. наука, 1952.— 22 с.; 2-е изд.— М.: Изд-во МГУ, 1958.— 60 с.
193. Предисловие к кн.: Э ш б и У. Р. Введение в кибернетику.— М.: ИЛ, 1959.— С. 5—8.
194. Автоматы и жизнь: Тез. докл., прочитанного на методологическом семинаре мех.-мат. ф-та МГУ 5 апреля 1961 г.— Маш. пер. и прикл. лингвист.— 1961.— вып. 6.— С. 3—8.
195. Автоматы и жизнь.— Техника—молодежи.— 1961.— № 10.— С. 16—19; № 11.— С. 30—33; а также в сб.: Кибернетика ожидаемая и кибернетика неожиданная.— М.: Наука, 1968.
196. Как я стал математиком.— Огонек.— 1963.— № 48.— С. 12—13.
197. Предисловие к кн.: Н. Б. В а с и л ь е в, А. А. Е г о р о в. Сборник подготовительных задач к Всероссийской олимпиаде юных математиков.— М.: Учпедгиз, 1963.

198. Геометрия на сфере и геология.— Наука и жизнь.— 1966.— № 2.— С. 32.
199. К основам русской классической метрики // Содружество наук и тайны творчества.— М.: Искусство, 1968.— С. 397—432. Совм. с А. В. Прохоровым.
200. Новое в школьной математике.— Наука и жизнь.— 1969.— № 3.— С. 62—66.
201. Курс математики для физико-математических школ.— М.: Изд-во МГУ, 1971, 223 с. Совм. с В. А. Гусевым, А. Б. Сосинским, А. А. Шершевским.
202. Летняя школа на Рубском озере.— М.: Просвещение, 1971, 160 с.
203. Научный руководитель // Нейман Л. Радость открытия.— М.: Дет. лит., 1972.
204. Учителя не заменить.— Комс. правда, 1972, 19 января.
205. Заботясь о достойном пополнении.— Вестн. высш. шк.— 1974.— № 6.— С. 26—33. Совм. с И. Т. Тропиным и К. В. Чернышевым.
206. Новые программы: Специализированные школы // Математическое образование сегодня. М.: Просвещение, 1974.— С. 5—12.
207. Как я стал математиком. Что такое математика // Наука в твоей профессии.— М.: Знание.— 1978.— № 11.— С. 5—9.
208. Геометрия для 6—8 классов: Учебное пособие.— 3-е изд.— М.: Просвещение, 1981. Совм. с А. Ф. Семеновичем и Р. С. Черкасовым; 1-е изд.— М., 1979.
209. Физико-математическая школа при МГУ.— М.: Изд-во МГУ, 1981 (Математика, кибернетика, № 5). Совм. с В. В. Вавиловым и И. Т. Тропиным.
210. Алгебра и начала анализа: Учебное пособие для 9 и 10 классов средней школы.— 4-е изд.— М.: Просвещение, 1983. Совм. с А. М. Абрамовым, Б. Е. Вейцем, О. С. Ивашевым-Мусатовым и С. И. Шварцбурдом; 1-е изд.— М.: Просвещение, 1980.
211. Введение в теорию вероятностей.— М.: Наука, 1982, 159 с. (Библиотечка «Квант». Вып. 23). Совм. с И. Г. Журбенко и А. В. Прохоровым).
212. Что дает и мог бы дать «Квант» учителю математики? — Учительская газета, 1985, 22 января, № 10 (8479).
213. Паркеты из правильных многоугольников.— Энциклопедический словарь юного математика.— М.: Педагогика, 1985.— С. 200—201.
214. Ред. и предисл. к книге: Гальперин Г. А., Толпыго А. К. Московские математические олимпиады.— М.: Просвещение, 1986.
215. Предисловие к кн.: Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп.— М.: Наука, 1981 (Библиотечка «Квант». Вып. 8).
216. Воспоминания о П. С. Александрове.— УМН.— 1986.— Т. 41, вып. 6(252).— С. 187—203.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие составителя 5

Раздел I. РАЗМЫШЛЕНИЯ МАТЕМАТИКА 7

1. Как я стал математиком 7
2. Научный руководитель 10
3. Два интервью 14
4. О профессии математика 22
5. Геометрия на сфере и геология 41
6. Автоматы и жизнь 43
7. Избранные предисловия 62

Раздел II. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ 67

1. Что такое функция? 67
2. Что такое график функции? 79
3. Функции двух и многих переменных. Зависимости между переменными и их графики 91
4. Группы преобразований 98
5. Введение к «Курсу математики для физико-математических школ» 103
6. Геометрия и кинематика на плоскости 135
7. О языке математических знаков 166

Раздел III. ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ 174

1. Введение в теорию вероятностей и комбинаторику 174
2. Полулогарифмическая и логарифмическая сетки . . . 190
3. Величина и ее измерение 198
4. Алгоритм Евклида 202
5. О решении десятой проблемы Гильберта 206
6. К обоснованию теории вещественных чисел 215
7. Избранные задачи 218

Раздел IV. ЛЕКЦИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ 227

1. Современные взгляды на природу математики . . . 227
2. Натуральные числа 237
3. Обобщение понятия числа. Неотрицательные рациональные числа 255
4. Что дает и мог бы дать «Квант» учителю математики? 267
5. О воспитании на уроках математики и физики диалектико-материалистического мировоззрения 270

Библиографический комментарий 276

Список научно-популярных трудов А. Н. Колмогорова (в том числе работ по школьной тематике) 280

Андрей Николаевич Колмогоров

МАТЕМАТИКА — НАУКА И ПРОФЕССИЯ

Серия «Библиотечка «Квант», выпуск 64

На первой странице обложки — рисунок *Г. А. Гальперина*
На второй странице обложки — картина *Д. И. Гордеева* «Три Колмогорова»

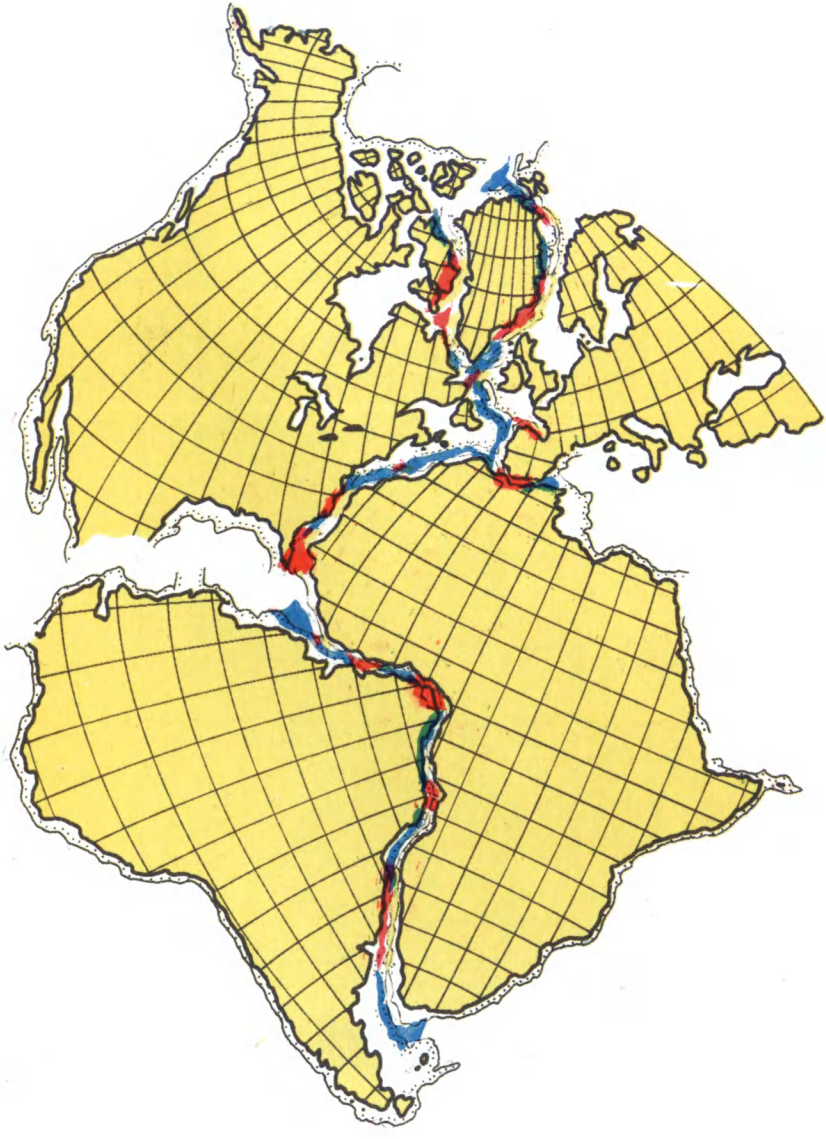
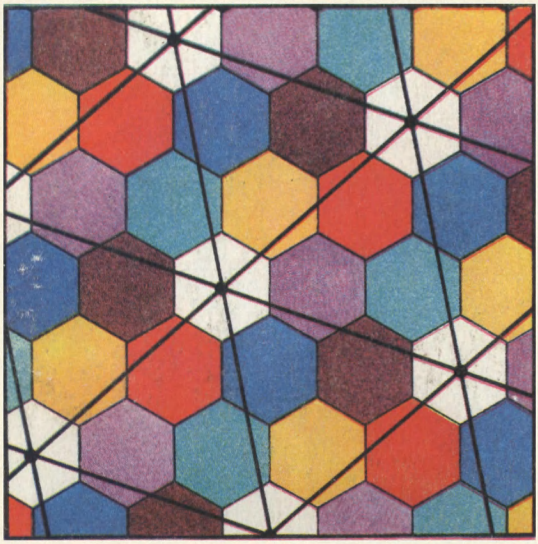
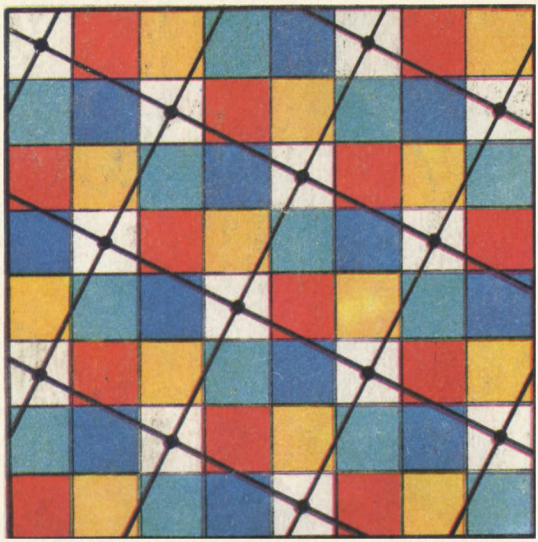
Редактор *А. Г. Мордвинцев*
Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*
Технический редактор *Л. В. Лихачева*
Корректор *Н. Д. Храпко*

ИБ № 32664

Сдано в набор 14.09.87. Подписано к печати 02.12.87.
Т-24256. Формат 84×108/32.
Бумага книжно-журнальная. Гарнитура обыкновенная. Печать высокая.
Усл. печ. л. 15,12. Усл. кр.-отт. 15,96. Уч.-изд. л. 15,33.
Тираж 131 000 (1-й завод 1—50 000) экз. Заказ 876. Цена 65 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва В-71, Ленинский проспект, 15

2-я типография издательства «Наука»
121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 6



65 коп.